

ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

№ 1

AS  
262  
A6248  
v.1  
1937  
PER

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1937

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION

111 Fifth Avenue  
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited  
Berkeley Square House  
London, W. 1

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР  
Непременный секретарь академик Н. Горбунов

Ответственный редактор—академик-секретарь  
Отделения математических и естественных наук  
академик А. Е. Ферсман

Редакционная коллегия — Президиум Математической группы ОМАН:  
акад. И. М. Виноградов, акад. С. Н. Бернштейн,  
проф. Б. И. Сега

А. Н. КРЫЛОВ

**О РАСЧЕТЕ НАГРЕВАНИЯ МАСЛЯНОГО КАБЕЛЯ ПРИ КОРОТКОМ  
ЗАМЫКАНИИ<sup>1</sup>**

Дается численный метод расчета нагревания кабеля при коротком замыкании на основе применения метода наименьших квадратов к приближенному решению уравнения теплопроводности.

§ 1. Завод «Севкабель» обратился ко мне за указаниями о способе расчета нагревания масляного кабеля в течение непродолжительного времени (около 3 сек.), следующего за коротким замыканием.

Я указал на обычный прием решения подобного рода задач по методе фундаментальных функций, в данном случае бесселевых, с применением для определения коэффициентов разложений, удовлетворяющих начальным условиям, способа наименьших квадратов, если не удастся представить эти коэффициенты в виде определенных интегралов.

Некоторые предварительные расчеты, произведенные заводом, давали основание полагать, что в разложениях достаточно брать 8 первых членов; тогда вычисление по методе наименьших квадратов, если его вести на три знака логарифмической линейкой, взяв 48 условных уравнений и не вычисляя ни весов, ни вероятных ошибок, занимает у привычного к такой работе вычислителя около 16—20 час.

Но затем у меня возникло сомнение, не встретятся ли при решении этой задачи такие затруднения, при которых обычный способ решения окажется неприменимым. Поэтому я сделал попытку развить все необходимые общие формулы, не производя числовых расчетов. Оказалось, что единственное затруднение состоит в том, что, строго говоря, те функции, которыми приходится пользоваться, не являются фундаментальными, ибо они между собою не ортогональны, нахождение же «весов», которыми ортогональность достигается, весьма затруднительно; поэтому практически приходится прибегать к методу наименьших квадратов, чтобы получить приближенные разложения, наметив в буквенной форме лишь общий ход вычислений, как о том указывается ниже.

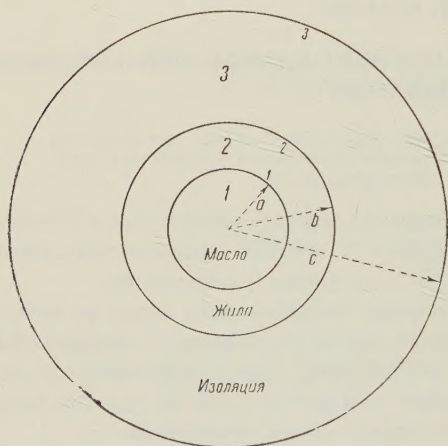
<sup>1</sup> Доложено 21 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.



В виду этой особенности поставленной задачи я позволяю себе изложить ее в надежде, что кто-либо другой укажет более изящный способ решения, а главное, требующий меньшей затраты вычислительной работы.

§ 2. Поперечное сечение кабеля изображено схематически на чертеже. Напряжение весьма высокое (100 000 В), но сечение кабеля таково, что при нормальной силе тока устанавливается тепловое состояние кабеля, которое не вызывает его порчи.

Не то будет при случайном коротком замыкании: ток почти мгновенно достигнет громадной силы (свыше 10 000 А); между тем автома-



тические выключатели требуют около 3 сек., чтобы выключить генератор. Отсюда задача об определении теплового состояния кабеля в любой момент времени после короткого замыкания, причем время это не превышает 3 сек.

Итак, мы делаем следующее основное допущение: сила тока в жиле устанавливается гораздо быстрее, нежели происходит нагревание кабеля, поэтому принимаем, что все время процесса сила тока постоянная, а значит, с момента

$t = 0$  происходит постоянное на каждую единицу длины кабеля выделение тепла в жиле и с этого же момента происходит усиленная против нормальной отдача тепла маслу и изоляции.

Кроме того, делается допущение, что все термические элементы (теплоемкость, теплопроводность, теплоотдача) от температуры не зависят и остаются постоянными. Таково задание, сформулированное в соответствии с предъявленными мне «Севкабелем» требованиями.

Систему единиц берем CGS. Температуру выражаем в градусах Цельсия, причем за начальный уровень принимаем не температуру таяния льда, а температуру почвы, ибо это удобнее при развитии формул. Теплоемкость будем выражать в малых калориях, относим ее к единице массы, т. е. к грамму. Таким образом единицы будут:

Количество тепла	кал (малая калория),
Теплопроводность	$\frac{\text{кал}}{\text{см}^3} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}},$
Теплоемкость	$\frac{\text{кал}}{\text{г}} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}},$
Теплоотдача	$\frac{\text{кал}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}},$
Плотность	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$

Соответственно схеме сечения кабеля примем следующие обозначения термических элементов различных средин, приписывая маслу индекс 1, жиле—индекс 2, изоляции— индекс 3:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Плотность} & \delta_i \\ \text{Теплоемкость} & K_i \\ \text{Теплопроводность} & \eta_i \\ \text{Постоянная} & k_i = \frac{\eta_i}{K_i \delta_i} \\ \text{Теплоотдача} & H_i \\ \text{Постоянная} & h_i = \frac{H_i}{K_i \delta_i} \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3)$$

Индекс  $i$  у  $H$  соответствует номеру поверхности.

§ 3. Обозначим через  $v_i(r, t) = v_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) температуру в момент времени  $t$  в слое, лежащем в расстоянии  $r$  от оси кабеля, беря значок  $i$  соответственно среде.

Поставленная задача сводится к следующей математической: требуется определить функции  $v_1, v_2, v_3$ , удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям (I), граничным условиям (II) и начальным условиям (III).

1°. Дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial v_1}{\partial t} = k_1 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} \right), & (1) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = k_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) + \frac{2 Q r}{K_2 (b^2 - a^2)}, & (2) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} = k_3 \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} \right). & (3) \end{array} \right\} \quad (I)$$

Здесь  $Q$  есть выделяемое в 1 сек. на каждый сантиметр длины кабеля количество тепла после короткого замыкания.

2°. Для составления граничных условий принимаем: сквозь каждую поверхность раздела двух смежных средин проходит в 1 сек. количество тепла, пропорциональное разности (перепаду) температур по обе стороны этой поверхности, так что это количество протекающего тепла будет:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a & \dots 2\pi a \cdot H_1 [v_2(a, t) - v_1(a, t)], \\ \text{» } r = b & \dots 2\pi b \cdot H_2 [v_2(b, t) - v_3(b, t)], \\ \text{» } r = c & \dots 2\pi c \cdot H_3 v_3(c, t). \end{aligned}$$

Соответствующие этому количеству тепла тепловые потоки в смежности с поверхностью раздела будут пропорциональны градиенту температуры и теплопроводности, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \text{ будет: для масла} & \quad 2\pi a \eta_1 \left( -\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)_{r=a}, \\ \text{» жилы} & \quad 2\pi a \eta_2 \left( -\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=a}, \\ \text{при } r = b \text{ будет: » } & \quad 2\pi b \eta_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=b}, \end{aligned}$$

для изоляции  $2\pi b\gamma_3\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=b}$ ,  
 при  $r=c$  будет: » »  $2\pi c\gamma_3\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=c}$ .

Положим для сокращения письма

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_1}{\gamma_1} &= h_1, \quad \frac{H}{\gamma_2} = l_1, \\ \frac{H_2}{\gamma_2} &= h_2, \quad \frac{H_3}{\gamma_3} = l_2, \\ \frac{H_3}{\gamma_3} &= h_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда получим следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } v_1: \text{ при } r=0 \text{ должно быть } v_1(0, t) &= \text{конечной величине;} \\ &» \quad r=a \quad » \quad » \quad \left(-\frac{\partial v_1}{\partial r}\right)_{r=a} = h_1[v_2(a, t) - v_1(a, t)], \\ \text{для } v_2: \text{ при } r=a \quad » \quad » \quad \left(-\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)_{r=a} &= l_1[v_2(a, t) - v_1(a, t)], \\ &» \quad r=b \quad » \quad » \quad \left(\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)_{r=b} = h_2[v_2(b, t) - v_3(b, t)], \\ \text{для } v_3: \text{ при } r=b \quad » \quad » \quad \left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=b} &= l_2[v_2(b, t) - v_3(b, t)], \\ &» \quad r=c \quad » \quad » \quad \left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=c} = h_3 v_3(c, t). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Все эти равенства должны иметь место при всяком значении времени  $t$ .

3°. Наконец, начальные условия относятся к начальному моменту  $t=0$  и выражаются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } v_1 \dots (v_1)_{t=0} &= v_1(r, 0) \quad 0 \leq r \leq a, \\ &» \quad v_2 \dots (v_2)_{t=0} = v_2(r, 0) \quad a \leq r \leq b, \\ &» \quad v_3 \dots (v_3)_{t=0} = v_3(r, 0) \quad b \leq r \leq c, \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

причем  $v_1(r, 0)$ ,  $v_2(r, 0)$ ,  $v_3(r, 0)$  будут известные функции от  $r$  в каждом из указанных промежутков. Определение этих функций показано ниже.

§ 4. Решение начинаем с определения начального теплового состояния кабеля, когда по нему идет ток нормальной силы и в жиле на 1 см длины развивается в 1 сек. количество тепла  $q$ . Ясно, что при таком установившемся состоянии температура масла (предполагая, что оно не просачивается) есть величина постоянная, равная температуре жилы при  $r=a$ . Вместе с тем температуры жилы и изоляции не зависят от времени  $t$ , тепловой же поток постоянный и равен  $q$ .

Таким образом для определения начального состояния имеем следующие уравнения, при само собой понятном обозначении:

$$\begin{aligned} v_{10} &= v_{20}(a), \\ r \frac{\partial v_{20}}{\partial r} &= \frac{q}{2\pi\gamma_2}, \\ r \frac{\partial v_{30}}{\partial r} &= \frac{q}{2\pi\gamma_3} \end{aligned}$$



и условия

$$\begin{aligned} 2\pi b \cdot H_2 [\nu_{20}(b) - \nu_{30}(b)] &= q, \\ 2\pi c H_3 \nu_{30}(c) &= q. \end{aligned}$$

Откуда легко находим:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{10} = \nu_1(r, 0) &= \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{\eta_2} \lg \frac{a}{b} + \frac{1}{\eta_3} \lg \frac{b}{c} + \frac{1}{cH_3} + \frac{1}{bH_2} \right], \\ \nu_{20} = \nu_2(r, 0) &= \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{\eta_2} \lg \frac{r}{b} + \frac{1}{\eta_3} \lg \frac{b}{c} + \frac{1}{cH_3} + \frac{1}{bH_2} \right], \\ \nu_{30} = \nu_3(r, 0) &= \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{\eta_3} \lg \frac{r}{c} + \frac{1}{cH_3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

§ 5. Заменяя в формулах (5) величину  $q$  через  $Q$ , получим те предельные значения функций  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ , которые они получают при  $t = \infty$ ; но эти предельные значения имеют лишь чисто математический смысл, физического же смысла не имеют, ибо они получаются в предположении, что все термические постоянные сохраняют свои значения, не зависящие от температуры, сколь бы эта температура высока ни была; между тем эта температура окажется столь высока, что весь кабель сгорит гораздо раньше, нежели  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  достигнут своих предельных значений.

§ 6. Переходя к определению неустановившегося теплового состояния кабеля, мы начнем с разыскания частных решений уравнений § 3, чтобы в дальнейшем иметь дело лишь с уравнениями однородными, т. е. без свободного члена.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \nu_1(r, t) &= u_1(r, t) + V_1(r), \\ \nu_2(r, t) &= u_2(r, t) + V_2(r), \\ \nu_3(r, t) &= u_3(r, t) + V_3(r), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

мы видим, что величины  $V_1(r)$ ,  $V_2(r)$ ,  $V_3(r)$  определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_1}{dr} &= 0, \\ \frac{d^2 V_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_2}{dr} + \frac{2Q}{k_2 K_2 (b^2 - a^2)} \cdot r &= 0, \\ \frac{d^2 V_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_3}{dr} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и граничными условиями, которые мы выберем так, чтобы условия для  $u_1(r, t)$ ,  $u_2(r, t)$ ,  $u_3(r, t)$  были те же самые, как и для  $\nu_1(r, t)$ ,  $\nu_2(r, t)$ ,  $\nu_3(r, t)$ , т. е. (II) с заменой в них букв  $\nu$  на  $u$ .

Таким образом граничные условия для  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  будут:

$$\left. \begin{aligned} V_1(0) &= \text{конечной величины,} \\ -\left(\frac{dV_1}{dr}\right)_{r=a} &= h_1[V_2(a) - V_1(a)], \\ -\left(\frac{dV_2}{dr}\right)_{r=a} &= l_1[V_2(a) - V_1(a)], \\ \left(\frac{dV_2}{dr}\right)_{r=b} &= h_2[V_2(b) - V_3(b)], \\ \left(\frac{dV_3}{dr}\right)_{r=b} &= l_2[V_2(b) - V_3(b)], \\ \left(\frac{dV_3}{dr}\right)_{r=c} &= h_3 V_3(c). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Обозначим для краткости

$$\frac{2Q}{k_2 K_2 (b^2 - a^2)} = \frac{2Q \delta_2}{\eta_2 (b^2 - a^2)} = m. \quad (9)$$

Тогда из уравнений (7) получим:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= L_1 \lg r + L_2, \\ V_2 &= -\frac{mr^3}{9} + L_3 \lg r + L_4, \\ V_3 &= L_5 \lg r + L_6, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$  произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. Именно будет:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0; \\ L_2 &= \frac{m}{9} (b^3 - a^3) - \frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[ \frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right] - \frac{ma^3}{3} \lg \frac{a}{b}, \\ L_3 &= \frac{ma^3}{3}; \\ L_4 &= -\frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[ \frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right] + \frac{mb^3}{9} - \frac{ma^3}{3} \lg b, \\ L_5 &= -\frac{m(b^3 - a^3)}{3} \cdot \frac{l_2}{h_2}, \\ L_6 &= -\frac{m}{3} (b^3 - a^3) \frac{l_2}{h_2} \left[ \frac{1}{h_3 c} - \lg c \right]. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} V_1(r) &= \frac{m}{9} (b^3 - a^3) - \frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[ \frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right] - \frac{ma^3}{3} \lg \frac{a}{b}, \\ V_2(r) &= \frac{m}{9} (b^3 - r^3) + \frac{ma^3}{3} \lg \frac{r}{b} - \frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[ \frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right], \\ V_3(r) &= -\frac{m(b^3 - a^3)}{3} \frac{l_2}{h_2} \left[ \lg \frac{r}{c} + \frac{1}{h_3 c} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти частные решения и надо прибавить к  $u_1(r, t)$ ,  $u_2(r, t)$ ,  $u_3(r, t)$ , определяемым однородными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= k_1 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= k_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= k_3 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



и граничными условиями (II), в которых надо вместо букв  $v_1, v_2, v_3$  написать соответственно  $u_1, u_2, u_3$ .

Что же касается начальных условий, то они будут:

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, 0) + V_1(r) &= v_1(r, 0), \\ u_2(r, 0) + V_2(r) &= v_2(r, 0), \\ u_3(r, 0) + V_3(r) &= v_3(r, 0), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

причем  $v_1(r, 0), v_2(r, 0), v_3(r, 0)$  даются формулами (5) и величина  $V_1(r), V_2(r), V_3(r)$ —формулами (11).

§ 7. Переходим к нахождению величин  $u_1, u_2, u_3$ , определяемых уравнениями (12), граничными условиями (II), с указанной выше заменой букв, и начальными условиями (13).

Как видно, все три дифференциальные уравнения (12) одного типа, именно (опустив значки):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (14)$$

Будем, как обычно, искать решение этого уравнения под видом суммы

$$u = \sum RT, \quad (15)$$

каждый член которой в отдельности удовлетворяет уравнению (14) и граничным условиям, вся же сумма сверх того и начальным условиям, причем  $R$  есть функция только переменной  $r$ ,  $T$ —функция только переменной  $t$ .

Отсюда, обозначая производные значками, следует:

$$RT' = kT(R'' + \frac{1}{r}R'). \quad (16)$$

Следовательно, должно быть

$$\frac{T'}{T} = \frac{k}{R} \left[ R'' + \frac{1}{r}R' \right] = -\lambda^2, \quad (17)$$

причем  $\lambda^2$ —любое постоянное число.

Из уравнений (17), которые напомним так:

$$\left. \begin{aligned} T' + \lambda^2 T &= 0, \\ R'' + \frac{1}{r}R' + \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k}} \right)^2 R &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

имеем:

$$\begin{aligned} T &= L e^{-\lambda^2 t}, \\ R &= M I_0 \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right) + N Y_0 \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right), \end{aligned}$$

причем  $L, M, N$ —произвольные постоянные,  $I_0, Y_0$ —бесселевы функции нулевого индекса.

Так как в сумму  $\sum RT$  войдут лишь произведения  $LM$  и  $LN$ , которые суть такие же произвольные постоянные, как  $M$  и  $N$ , то без ущерба общности можно полагать  $L = 1$  и писать

$$\left. \begin{aligned} T &= e^{-\lambda^2 t} \\ R &= M I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right) + N Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

опуская индексы «нуль», ибо функций иного индекса в нашей задаче встречаться не будет. Что же касается аргументов, то для функции  $u_1$  надо полагать  $k = k_1$ , для функций  $u_2$  и  $u_3$  соответственно брать  $k = k_2$  и  $k = k_3$ . Таким образом будет:

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, t) &= \sum \left[ AI \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} r \right) + BY \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} r \right) \right] e^{-\lambda^2 t}, \\ u_2(r, t) &= \sum \left[ CI \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} r \right) + DY \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} r \right) \right] e^{-\lambda^2 t}, \\ u_3(r, t) &= \sum \left[ EI \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} r \right) + FY \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} r \right) \right] e^{-\lambda^2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

причем  $A, B, C, D, E, F, \lambda$  могут принимать какие угодно постоянные значения. Выражения (20) будут удовлетворять однородным дифференциальным уравнениям (12).

Чтобы удовлетворить граничным условиям (II), надо выбрать постоянные  $A, B, C, D, E, F$  и  $\lambda$  так, чтобы каждая из функций  $R$  в отдельности удовлетворяла граничным условиям.

Первое из этих условий даст  $AI(0) + BY(0) = \text{конечной величины}$ ; отсюда следует  $B = 0$ .

Затем имеем:

$$\begin{aligned} A \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} I' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a \right) - h_1 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a \right) \right] + Ch_1 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) + Dh_1 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) &= 0, \\ -Al_1 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a \right) + C \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) + l_1 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) \right] + \\ + D \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) + l_1 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) \right] &= 0, \\ C \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) - h_2 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) \right] + D \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) - \right. \\ \left. - h_2 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) \right] + Eh_2 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) + Fh_2 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) &= 0, \\ -Cl_2 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) - Dl_2 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) + E \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) + \right. \\ + l_2 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) \right] + F \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) + l_2 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) \right] &= 0, \\ E \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) - h_3 I \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) \right] + \\ + F \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y' \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) - h_3 Y \left( \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие совместности этих уравнений выражается уравнением (22), приведенным на отдельном листке.

Пусть корни этого уравнения суть:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_i. \quad (23)$$

Это суть так называемые характеристические числа. Обозначим через  $\Delta_1(\lambda_i)$ ,  $\Delta_2(\lambda_i)$ ,  $\Delta_3(\lambda_i)$ ,  $\Delta_4(\lambda_i)$ ,  $\Delta_5(\lambda_i)$  миноры определителя  $\Delta(\lambda_i)$ , соответствующие какой-либо строке, например первой. Тогда соответствующие корню  $\lambda_i$  значения постоянных  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  получатся из равенств:

$$\frac{A_i}{\Delta_1(\lambda_i)} = \frac{C_i}{\Delta_2(\lambda_i)} = \frac{D_i}{\Delta_3(\lambda_i)} = \frac{E_i}{\Delta_4(\lambda_i)} = \frac{F_i}{\Delta_5(\lambda_i)} = N_i, \quad (24)$$

т. е. будут

$$A_i = N_i \Delta_1(\lambda_i); \quad C_i = N_i \Delta_2(\lambda_i); \quad D_i = N_i \Delta_3(\lambda_i); \quad E_i = N_i \Delta_4(\lambda_i); \quad F_i = N_i \Delta_5(\lambda_i).$$

Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \Delta_1(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_1}} r\right) \cdot e^{-\lambda_i^2 t}, \\ u_2(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[ \Delta_2(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) \right] e^{-\lambda_i^2 t}, \\ u_3(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[ \Delta_4(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) \right] e^{-\lambda_i^2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Эти выражения при всяких значениях постоянных удовлетворяют дифференциальным уравнениям (12) и граничным условиям (II). Остается удовлетворить начальным условиям (13).

§ 8. На основании выражений (25) начальные условия будут:

$$\left. \begin{aligned} (0 \leq r \leq a), \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \Delta_1(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_1}} r\right) &= u_1(r, 0), \\ (a \leq r \leq b), \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[ \Delta_2(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) \right] &= u_2(r, 0), \\ (b \leq r \leq c), \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[ \Delta_4(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) \right] &= u_3(r, 0), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

причем значения  $u_1(r, 0)$ ,  $u_2(r, 0)$ ,  $u_3(r, 0)$  для соответствующих промежутков определяются формулами (13).

Положим, что каждый из промежутков

$$0 \text{ до } a; \quad a \text{ до } b; \quad b \text{ до } c$$

подразделен на  $n$  частей, скажем, равных между собой, тогда, взяв в суммах (26) какое-либо конечное число  $j$  первых членов, выбирая это число  $j$  так, чтобы при  $t = 0$  всеми дальнейшими членами можно было пренебречь, мы применим для вычисления коэффициентов  $N_i$  методу





причем функции  $a(r)$ ,  $b(r)$ ,  $c(r)$  определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \text{если } 0 \leq r \leq a, \text{ то } a(r) &= \Delta_1(\lambda_1) I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_1}} r\right), \\ b(r) &= \Delta_1(\lambda_2) I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_1}} r\right), \\ c(r) &= \Delta_1(\lambda_3) I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_1}} r\right); \\ \text{если } a \leq r \leq b, \text{ то } a(r) &= \Delta_2(\lambda_1) I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_1) Y\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_2}} r\right), \\ b(r) &= \Delta_2(\lambda_2) I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_2) Y\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} r\right), \\ c(r) &= \Delta_2(\lambda_3) I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_3) Y\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_2}} r\right); \\ \text{если } b \leq r \leq c, \text{ то } a(r) &= \Delta_4(\lambda_1) I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_1) Y\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_3}} r\right), \\ b(r) &= \Delta_4(\lambda_2) I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_2) Y\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_3}} r\right), \\ c(r) &= \Delta_4(\lambda_3) I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_3) Y\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}} r\right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Если бы удалось (например, применяя методу Коши и произведя все сложные выкладки ею вызываемые) найти такие множители (веса)  $p(r)$ ,  $q(r)$ ,  $s(r)$ , при которых все функции  $a(r)$ ,  $b(r)$ ,  $c(r)$  становятся ортогональными, то нормальные уравнения приняли бы вид:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \int_0^c p(r) [a(r)]^2 dr &= \int_0^c p(r) a(r) u(r) dr, \\ N_2 \int_0^c q(r) [b(r)]^2 dr &= \int_0^c q(r) b(r) u(r) dr, \\ N_3 \int_0^c s(r) [c(r)]^2 dr &= \int_0^c s(r) c(r) u(r) dr. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Но практически даже при  $j=8$  потребуется меньше работы на вычисление всех 36 интегралов таких, как (29), нежели на развитие всех формул в методе Коши. Работа по вычислению интегралов значительно сократится, если взять  $n=7$  и применять для вычисления интегралов формулу Чебышева для каждого из трех интервалов в отдельности.

Решение нормальных уравнений «приведением первого коэффициента к единице» подобно тому, как это изложено в моих «Лекциях о приближенных вычислениях», если вычисление вести на три знака при помощи 50-см логарифмической линейки, требует написания всего около 2200 цифр.

Наиболее трудная часть есть вычисление корней трансцендентного уравнения  $\Delta(\lambda)=0$ . Эта работа может быть облегчена тем, что для жилы постоянная  $k_2$  весьма велика по сравнению с  $k_1$  и  $k_3$ , и в первом приближении можно принять  $k_2=\infty$ . Тогда уравнение  $\Delta(\lambda)$  значительно упрощается и доставит приближенные значения корней  $\lambda$ , после чего нахождение более точных значений становится простым. •

На подробностях численных вычислений, их расположения, схем, избежания утраты значащих цифр и пр. мы останавливаться не будем—всякий вычислитель распорядится применительно своим навыкам и привычкам.

В заключение я считаю долгом высказать свою глубочайшую благодарность В. А. Фоку, который, ознакомясь с содержанием этой работы по черновой рукописи, дал мне ряд весьма ценных указаний.

Академия Наук СССР.

#### A. KRILOFF. ON THE HEATING OF A CABLE HAVING AN OIL CORE DURING A SHORT CIRCUIT

##### SUMMARY

A solution of the above problem is shown using for the determination of the coefficients in the developments the method of least squares.



Н. А. АРТЕМЬЕВ

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном)

Исследуется существование периодических решений одного класса нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. При определенных условиях доказывается теорема существования периодических решений. Метод заключается в приведении задачи к бесконечной системе интегральных уравнений Фредгольма. В случае, названном автором «квазирезонансом», доказывается теорема несуществования периодических решений. Дается пример нелинейного уравнения, показывающий, что теорию периодических решений Пуанкаре в некоторых случаях нельзя распространить на уравнения в частных производных.

## § 1. Введение и постановка задачи

Целый ряд задач теории колебаний приводит к вопросу об отыскании периодических решений нелинейных уравнений в частных производных. Нелинейная задача о колебаниях струны представляет задачу подобного типа, которую можно сформулировать следующим образом:

Найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(\mu, x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad (1)$$

( $a$ —постоянная,  $\mu$ —малый параметр,  $F$ —периодическая функция времени  $t$  с периодом 1, нелинейно содержащая  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и при  $\mu = 0$  обращающаяся в функцию, зависящую только от  $x$  и  $t$ ), граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (2)$$

условиям периодичности

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и непрерывную вместе со своими частными производными<sup>1</sup> до 2-го порядка включительно в замкнутой области

<sup>1</sup> Мы будем подразумевать под «частными производными 2-го порядка» лишь те производные, которые входят в уравнение (1), т. е.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , не оговаривая этого каждый раз.

$$\overline{\Omega} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, мы можем сразу считать, что краевые условия (2) по  $x$  заданы в точках  $x=0$  и  $x=1$ , так как с помощью линейной замены переменных вида  $y = \frac{x}{l}$  задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(\mu, x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=l} = 0$$

сводится к задаче типа (1), (2). По той же причине в условиях (3) мы требуем периодичности с периодом 1.

Здесь, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы будем различать два случая:

- 1) когда правая часть уравнения (1) содержит время  $t$  явно,
- 2) когда правая часть уравнения (1) времени  $t$  явно не содержит, т. е. требуется найти периодическое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_1\left(\mu, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=1} = 0$$

$$u \Big|_{t=0} = u \Big|_{t=T}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=T},$$

период которого  $T$  заранее не известен.

Для задачи 1-го типа естественно исследовать в первую очередь периодические решения с периодом, равным периоду вынуждающей силы, т. е. функции  $F$ . В этой работе мы исследуем простейший частный случай задачи 1-го типа, а именно, когда правая часть уравнения (1) имеет вид

$$F\left(\mu, x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \Phi(x, t) + \mu f(u),$$

и доказываем, что в зависимости от ряда условий задача может иметь или не иметь решения.

Окончательно мы можем сформулировать нашу задачу следующим образом:

Исследовать, при каких значениях чисел  $a$  и  $\mu$  и при каких свойствах функций  $\Phi(x, t)$  и  $f(u)$  задача (4), (5), (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(u), \quad (4)$$

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=1} = 0 \quad (5)$$

$$u \Big|_{t=0} = u \Big|_{t=1} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=1}, \quad (6)$$

допускает решение  $u(x, t)$ , непрерывное вместе со своими частными производными до 2-го порядка включительно<sup>1</sup> в области  $\bar{\Omega}$ .

Для исследования задачи (4), (5), (6) мы пользуемся в этой работе двумя методами, тесно связанными между собой. Первый метод заключается в сведении задачи к бесконечной системе интегральных уравнений<sup>2</sup>, для которой затем доказывается теорема существования методом последовательных приближений. Второй метод заключается в эффективном построении некоторой функции Грина, с помощью которой задачу можно привести к решению одного интегрального уравнения.

Наконец, из доказываемой нами теоремы несуществования видно, что метод Пуанкаре, построенный им для исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, в некоторых случаях нельзя распространить на уравнения в частных производных<sup>3</sup>.

## 1 МЕТОД

### § 2. Основные понятия и обозначения

Мы будем рассматривать различного рода вещественные пространства, точками которых  $z$  являются последовательности вещественных чисел

$$z = \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\},$$

подчиненных тем или иным условиям.

Вид этих условий будет указан в одном из следующих параграфов. Пусть  $f$  точка с координатами

$$\{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$$

и пусть ее координаты  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) зависят от координат точки  $z$ , так что

$$f_k = f_k(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

что мы условимся кратко записывать в виде

$$f_k = f_k(z) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

или

$$f = f(z).$$

Функции  $f_k$  будут у нас степенными рядами от бесконечного числа аргументов  $z_1, z_2, \dots$ , поэтому мы приводим здесь определение сходимости подобного ряда, взятое нами из работы А. Wintner'a [3].

Степенной ряд от бесконечного числа аргументов  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ , вещественных или комплексных, формально можно записать в виде<sup>4</sup>

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 15.

<sup>2</sup> Е. Hölder [1] применял для доказательства существования периодических решений интегральные уравнения.

<sup>3</sup> А. Витт применял метод Пуанкаре к нелинейным уравнениям в частных производных [2].

<sup>4</sup> В этой работе нам понадобятся исключительно вещественные ряды, т. е. ряды, в которых все коэффициенты  $c_1, \dots, c_n$ , а также переменные  $z_1, z_2, \dots$  будут вещественными.



$$f(z_1, z_2, \dots, z_k, \dots) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{v_1=1 \\ v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n}}^{\infty} \dots \sum_{v_n=1}^{\infty} c_{v_1 \dots v_n} z_{v_1} \dots z_{v_n}, \quad (7)$$

где коэффициенты  $c_{v_1 \dots v_n}$  могут быть также вещественными или комплексными.

Для того чтобы установить понятие сходимости ряда вида (7), введем предварительно следующие определения:

**Определение I.** Ряд, получающийся из (7), если все  $z_k$ , кроме первых  $m$ , положить равными нулю, мы будем называть  $m$ -ым сечением ряда (7) и обозначать символом  $f^{(m)}(z_1, z_2, \dots, z_m)$ , так что

$$\begin{aligned} f^{(m)}(z_1, z_2, \dots, z_m) &= f(z_1, \dots, z_m, 0, 0, \dots) = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v_1=1}^m \dots \sum_{v_n=1}^m c_{v_1 \dots v_n} z_{v_1} \dots z_{v_n}. \end{aligned}$$

**Определение II.** Степенной ряд от бесконечного числа переменных

$$f(z_1, z_2, \dots, z_k, \dots) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v_1=1}^{\infty} \dots \sum_{v_n=1}^{\infty} c_{v_1 \dots v_n} z_{v_1} \dots z_{v_n}$$

называется сходящимся в точке  $z = \{z_1, z_2, \dots\}$ , если соблюдаются следующие условия:

1)  $m$ -ое сечение ряда

$$f^{(m)} = f(z_1, \dots, z_m, 0, 0, \dots)$$

при любом значении  $m$  сходится в обычном смысле теории функций;

2) существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^{(m)} = f.$$

### § 3. Подстановка ряда Фурье в полином

**ЛЕММА I.** Пусть  $f(u)$ <sup>1</sup> полином  $n$ -ой степени с постоянными коэффициентами и не содержащий свободного члена

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$$

и пусть  $u(x, t)$  функция, равная сумме ряда Фурье

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k\pi x, \quad (8)$$

коэффициенты которого  $u_k(t)$  удовлетворяют условиям:

1) все  $u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) непрерывны при  $0 \leq t \leq 1$ ;

<sup>1</sup> Мы считаем функцию  $f(u)$  полиномом единственно для большей простоты доказательства. Все дальнейшие рассуждения можно было бы также провести для голоморфной функции.

2)  $|u_k(t)| \leq \frac{b}{k^2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) при  $0 \leq t \leq 1$ ,  $b$  — постоянная;

3)  $u_k(t) = u_k(t+1)$ .

Тогда коэффициенты Фурье  $f_k$  функции  $f[u(x, t)]$ , разложенной в промежутке  $0 \leq x \leq 1$  по  $\sin k\pi x$ , будут непрерывными функциями  $t$  и могут быть представлены в явном виде степенными рядами от бесконечного числа аргументов  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...

$$f_k(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{v_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{v_m=1}^{\infty} c_{v_1 \dots v_m}^{(k)} u_{v_1}(t) \dots u_{v_m}(t),$$

сходящимися при любом значении  $t$ .

Доказательство. В силу абсолютной и равномерной сходимости ряда (8) в области  $\bar{\Omega}$ , его можно возводить в любую степень и интегрировать почленно по  $x$  в интервале  $(0, 1)$ . Поэтому ряды (9)

$$\begin{aligned} \zeta_k^{(m)} &= \sqrt{2} \int_0^1 a_m u^m \sin k\pi x \, dx = \sqrt{2} a_m \int_0^1 \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} u_v(t) \sin v\pi x \right\}^m \sin k\pi x \, dx = \\ &= \sum_{v_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{v_m=1}^{\infty} c_{v_1 \dots v_m}^{(k)} u_{v_1}(t) \dots u_{v_m}(t) \quad (m = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (9)$$

будут сходиться абсолютно и равномерно при любом  $t$ .

Суммируя ряды (9) по  $m$  от 1 до  $n$ , получим опять абсолютно и равномерно сходящийся ряд при любом  $t$  для коэффициента  $f_k$

$$\begin{aligned} f_k[u_1(t), u_2(t), \dots] &= \sum_{m=1}^n \beta_k^{(m)} = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{v_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{v_m=1}^{\infty} c_{v_1 \dots v_m}^{(k)} u_{v_1}(t) \dots u_{v_m}(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (9')$$

Очевидно функции

$$f_k[u_1(t), u_2(t), \dots] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

будут непрерывными функциями  $t$  при  $0 \leq t \leq 1$ .

#### § 4. Приведение задачи к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

В уравнении (4) мы будем считать функцию  $\Phi(x, t)$  представимой в виде ряда Фурье

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(t)}{k^2} \sin k\pi x, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2(t) = C^2(t) \leq c^2, \quad (10)$$

коэффициенты которого  $\Phi_k(t)$  суть периодические функции  $t$  с периодом 1, непрерывные в интервале  $0 \leq t \leq 1$ .

Соответственно этому мы будем искать решение задачи (4), (5), (6) в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin k\pi x, \quad (11)$$

где  $z_k(t)$  — неизвестные функции.

Подставляя формально ряды (10) и (11) в уравнения (4), (5), (6), разлагая правую часть (4) опять в ряд Фурье по  $\sin k\pi x$  и сравнивая коэффициенты при  $\sin k\pi x$ , получим бесконечную систему дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{z}_k(t) + \pi^2 a^2 k^2 z_k(t) = \Phi_k(t) + \mu f_k[z_1(t), z_2(t), \dots] \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} z_k(0) &= z_k(1), \\ \dot{z}_k(0) &= \dot{z}_k(1), \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12')$$

в которой функции  $f_k$  будут степенными рядами от бесконечного числа аргументов  $z_1, z_2, \dots$  вида (9').

Рассмотрим еще отдельно частный случай, когда  $f(u)$  полином, содержащий только нечетные степени  $u$ , и когда ряд (10) содержит только синусы нечетных кратностей.

В этом случае будем искать решение задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin (2k+1)\pi x. \quad (13)$$

Соответствующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений в этом случае будет иметь вид:

$$\ddot{z}_{2k+1}(t) + \pi^2 a^2 (2k+1)^2 z_{2k+1}(t) = \Phi_{2k+1}(t) + \mu f_{2k+1}[z_1, z_3, \dots] \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} z_{2k+1}(0) &= z_{2k+1}(1) \\ \dot{z}_{2k+1}(0) &= \dot{z}_{2k+1}(1) \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (14')$$

## § 5. Приведение задачи к бесконечной системе интегральных уравнений

Систему уравнений (12) с граничными условиями (12') легко свести к бесконечной системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

В самом деле, линейному уравнению

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad (15)$$

где  $\omega$  — постоянная ( $\omega \neq 2m\pi$ ),  $m$  — целое число ( $m > 0$ ) с граничными условиями периодичности

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y(1) \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}(1) \end{aligned} \right\} \quad (15')$$



соответствует функция Грина

$$G(t, \tau) = \frac{\cos \omega \left( |t - \tau| - \frac{1}{2} \right)}{2\omega \sin \frac{\omega}{2}} \quad (0 \leq t, \tau \leq 1). \quad (16)$$

Если число  $\omega$  в уравнениях (12) таково, что  $\omega_k = \pi a k \neq 2m\pi$ , где  $m$  целое число  $> 0$ , то каждому линейному уравнению

$$\ddot{z}_k + \omega_k^2 z_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} z_k(0) &= z_k(1) \\ \dot{z}_k(0) &= \dot{z}_k(1) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

будет соответствовать функция Грина

$$G_k(t, \tau) = \frac{\cos \omega_k \left( |t - \tau| - \frac{1}{2} \right)}{2\omega_k \sin \frac{\omega_k}{2}} \quad (0 \leq t, \tau \leq 1). \quad (17)$$

С помощью формулы Грина

$$I_k = \int_0^1 \left\{ [\ddot{z}_k(\tau) + \omega_k^2 z_k(\tau)] G_k(t, \tau) - \left[ \frac{\partial^2 G_k}{\partial \tau^2} + \omega_k^2 G_k \right] z_k(\tau) \right\} d\tau$$

система (12) будет таким образом сведена к бесконечной системе интегральных уравнений<sup>1</sup>:

$$z_k(t) = \int_0^1 G_k(t, \tau) [\Phi_k(\tau) + \mu f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots)] d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Таким образом всякое непрерывное решение системы дифференциальных уравнений (12) с граничными условиями (12'), удовлетворяющее условию

$$|z_k(\tau)| \leq \frac{c}{k^2}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $c$  — постоянная, является также решением системы интегральных уравнений (18).

<sup>1</sup> Интеграл  $\int_0^1 G_k(t, \tau) [\Phi_k(\tau) + \mu f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots)] d\tau$  имеет наиверное смысл,

если функция  $f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots)$  есть непрерывная функция  $\tau$  при  $0 \leq \tau \leq 1$ . Из леммы I мы знаем, что достаточными для этого условиями являются следующие:

1) все  $z_k(\tau)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) непрерывны при  $0 \leq \tau \leq 1$ ;

2)  $|z_k(\tau)| \leq \frac{c}{k^2}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ ,

где  $c$  — постоянная.

В дальнейшем мы докажем существование такого решения для системы (27), чем и будет оправдана законность операции интегрирования.

Наконец, напомним для дальнейшего, что если  $f(t) = f(t+1)$  есть произвольная непрерывная периодическая функция, то функция

$$y(t) = \int_0^1 G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

будет периодическим решением уравнения

$$\ddot{y}(t) + (2m+1)^2 \pi^2 y(t) = f(t)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y(0) = y(1) \\ \dot{y}(0) = \dot{y}(1) \end{cases}$$

### § 6. Функциональное пространство $A_m$

Доказательство теоремы существования будет основано на свойствах некоторого метрического пространства, которое мы обозначим символом  $A_m$ , а также на свойствах пространства Гильберта. В этом параграфе мы исследуем нужные нам свойства пространства  $A_m$ .

Определение III. Функция  $\Phi(x)$ , обладающая рядом Фурье

$$\Phi(x) \sim \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k^m} \sin k\pi x, \quad (19)$$

где  $m$  — целое число  $\geq 0$ , есть точка функционального пространства  $A_m$ , если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 = c^2 < +\infty \quad (20)$$

сходится.

ЛЕММА II. Пусть

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \quad (21)$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2 = c^2 < +\infty \quad (22)$$

и пусть  $f(u)$  нечетный полином<sup>1</sup>; тогда функция  $f(\Phi(x)) \in A_3$ .

Доказательство. В силу (21) и (22) функции  $\Phi'(x)$  и  $\Phi''(x)$  непрерывны при любом значении  $x$  и получаются дифференцированием (21).

<sup>1</sup> или нечетная голоморфная функция; для голоморфной функции лемма справедлива при условии, что  $|\Phi(x)| < R$ , где  $R$  — радиус сходимости ряда

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} u^{2k+1}.$$

Функция  $\varphi(x)$ , ряд Фурье которой  $-\sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1} \cos(2k+1)\pi x$  получается формальным дифференцированием ряда (21), представляет собою в силу (22) функцию с суммируемым квадратом. Функция  $\varphi(x)$  почти для всех  $x$  равна  $\Phi'''(x)$ . Из формул дифференцирования сложной функции заключаем, что функции  $\frac{df(\Phi)}{dx}$ ,  $\frac{d^2f(\Phi)}{dx^2}$  непрерывны.

Наконец из формулы

$$\left(\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}\right)^2 = \left[f'''(\Phi)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3 + 3f''(\Phi)\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2}\right]^2 + 2\left[f'''(\Phi)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3 + 3f''(\Phi)\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2}\right]f'(\Phi)\frac{d^2\Phi}{dx^3} + \left[f'(\Phi)\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right]^2 \quad (23)$$

заключаем: первое слагаемое в квадратных скобках в правой части (23) есть непрерывная функция  $x$ ; второе и третье слагаемое суть произведения ограниченных и непрерывных функций на суммируемые функции, следовательно  $\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}$  есть функция с суммируемым квадратом.

Ряд Фурье, который мы получим, подставляя формально в выражение для  $\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}$  соответствующие ряды Фурье для  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$ ,  $\Phi'''$ , на основании теоремы о единственности ряда Фурье для функций с суммируемым квадратом, будет рядом Фурье функции  $\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}$ . Этот ряд будет иметь вид:

$$\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(\Phi_1, \Phi_3, \dots) \cos(2k+1)\pi x, \quad (24)$$

причем имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}^2 = \int_0^1 \left[\frac{d^3f(\Phi)}{dx^3}\right]^2 dx. \quad (25)$$

Обозначим теперь коэффициенты Фурье функции  $f(\Phi(x))$  через  $f_{2k+1}$ , т. е. положим]

$$f(\Phi(x)) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(\Phi_1, \Phi_3, \dots) \sin(2k+1)\pi x.$$

Интегрируя (24) последовательно три раза, в соответствующих пределах, и принимая во внимание, что  $\Phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $\Phi''(0) = 0$ , найдем

$$\begin{aligned} f(\Phi(x)) &= \int_0^x dx \int_{\frac{1}{2}}^x dx \int_0^x \frac{d^3f(\Phi)}{dx^3} dx = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_{2k+1}}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \equiv \\ &\equiv \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(\Phi_1, \Phi_3, \dots) \sin(2k+1)\pi x. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) и (26) вытекает справедливость леммы.

Введем теперь следующие понятия и обозначения:

Пусть

$$\Phi_1(x) \in A_3 \text{ и } \Phi_2(x) \in A_3$$

и пусть

$$\Phi_1(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'_{2k+1}}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \equiv \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi'_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y'^2_{2k+1} = c_1^2 < +\infty;$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y''_{2k+1}}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \equiv \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi''_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y''^2_{2k+1} = c_2^2 < +\infty$$

(верхние индексы у букв  $y$  и  $\Phi$  не смешивать с символами производных).

Тогда величину

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y'_{2k+1} - y''_{2k+1})^2}$$

мы назовем расстоянием между точками  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  пространства  $A_3$  и будем обозначать символом  $\omega[\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$  или также  $\omega[y', y'']$ , т. е.

$$\omega[y', y''] = \omega[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y'_{2k+1} - y''_{2k+1})^2}.$$

Величина  $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (\Phi''_{2k+1} - \Phi'_{2k+1})^2}$  есть расстояние между точками  $\Phi_1(x)$

и  $\Phi_2(x)$  в Гильбертовом пространстве<sup>1</sup>; ее мы условимся обозначать символом  $r[\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$  или  $r[\Phi', \Phi'']$ , так что

$$r[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] = r[\Phi', \Phi''] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (\Phi''_{2k+1} - \Phi'_{2k+1})^2}.$$

Наконец, мы введем еще аналогичное понятие расстояния для точек пространства  $A_2$ , т. е. если

$$\Phi_1(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'_{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} y'^2_{2k+1} = c_1^2 < +\infty;$$

<sup>1</sup> Очевидно, всякая точка  $\Phi(x) \in A_m$  ( $m \geq 1$ ) принадлежит также пространству Гильберта.



$$\Phi_2(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'_{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} y''_{2k+1} = c_2^2 < +\infty,$$

ТО ПОЛОЖИМ

$$\rho[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] = \rho[y', y''] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y'_{2k+1} - y''_{2k+1})^2}.$$

Очевидно для любых точек  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\Phi_3(x)$ , принадлежащих пространству  $A_3$  ( $A_2$  или пространству Гильберта), соблюдаются три основные аксиомы метрического пространства, в частности аксиома треугольника, т. е. например

$$\omega[\Phi_1(x), \Phi_3(x)] \leq \omega[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] + \omega[\Phi_2(x), \Phi_3(x)].$$

Теперь мы докажем следующую лемму:

ЛЕММА III. Пусть

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x, \quad \omega^2[\Phi(x), 0] = \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2 = c^2 < +\infty,$$

тогда, если

$$|\Phi(x)| \leq R \quad \text{и} \quad \omega[\Phi(x), 0] < 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \dots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

то имеет место неравенство

$$\rho^2[f(\Phi(x)), 0] \leq 16\beta^2\gamma_2^2\omega^2[\Phi(x), 0], \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= \max(\beta_1, \beta_2), \quad \gamma_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ \left. \begin{aligned} \beta_1 &= \max |f'(u)| \\ \beta_2 &= \max |f''(u)| \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad |u| \leq R. \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство. Из предыдущей леммы мы уже знаем, что точка  $f[\Phi(x)] \in A_3$  и тем более  $\in A_2$ . Согласно определению расстояния в пространстве  $A_2$

$$\rho^2[f(\Phi(x)), 0] = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 f_{2k+1}^2(\Phi_1, \Phi_3, \dots)$$

или на основании равенства Парсеваля

$$\rho^2[f(\Phi(x)), 0] = \frac{1}{\pi^4} \int_0^1 \left\{ \frac{d^2 f(\Phi)}{dx^2} \right\}^2 dx. \quad (29)$$

Из (29) получаем:

$$\rho^2[f(\Phi(x)), 0] \leq \frac{2}{\pi^4} \int_0^1 \left\{ [f''(\Phi)]^2 \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^4 + [f'(\Phi)]^2 \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right)^2 \right\} dx. \quad (30)$$

Далее имеем:

$$|\Phi(x)| \leq \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{2k+1}|}{(2k+1)^3} \leq \sqrt{2} c \gamma_6, \quad \text{где } \gamma_6^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6},$$

$$|\Phi'(x)| \leq \pi \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{2k+1}|}{(2k+1)^4} \leq \pi \sqrt{2} c \gamma_4, \quad \gamma_4^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4},$$

$$|\Phi''(x)| \leq \pi^2 \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y_{2k+1}|}{2k+1} \leq \pi^2 \sqrt{2} c \gamma_2, \quad \gamma_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Полагая  $|\Phi(x)| \leq R$ , на основании этих оценок и формул (28) и (29), находим:

$$\rho^2[f(\Phi(x)), 0] \leq 8\beta^2 \gamma_2^4 (c^4 + c^2)$$

и наконец в силу предположения, что  $\omega[\Phi(x), 0] = c < 1$ , получаем окончательно

$$\rho^2[f(\Phi(x)), 0] \leq 16\beta^2 \gamma_2^4 c^2 = 16\beta^2 \gamma_2^4 \omega^2[\Phi(x), 0],$$

что и требовалось доказать.

**Условие Липшица.** Пусть  $f(u)$  полином<sup>1</sup>, тогда при  $|u_1| \leq b$  и  $|u_2| \leq b$ , где  $b$  произвольно, но фиксировано, имеет место неравенство

$$[f(u_2) - f(u_1)]^2 \leq \alpha^2 (u_2 - u_1)^2, \quad (31)$$

где  $\alpha$  — некоторое постоянное число.

Положим<sup>2</sup>,

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} u'_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x \\ u_2(x) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} u''_{2k+1} \sin(2k+1)\pi x \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

и будем считать, что функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x) \in A_3$  и что при всяком  $x$

$$|u_1(x)| \leq b, \quad |u_2(x)| \leq b.$$

Коэффициенты Фурье функций  $f(u_1(x))$  и  $f(u_2(x))$  выражаются формулами:

$$f_{2k+1}(u'_1, u'_3, \dots) = \sqrt{2} \int_0^1 f(u_1(x)) \sin(2k+1)\pi x dx,$$

<sup>1</sup> Мы считаем полином нечетным.

<sup>2</sup> Нас интересует специально случай «нечетных рядов Фурье», хотя вывод условия Липшица сохраняет силу и в том случае, если

$$u_1(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k \sin k\pi x,$$

$$u_2(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u''_k \sin k\pi x.$$

$$f_{2k+1}(u_1'', u_3'', \dots) = \sqrt{2} \int_0^1 f(u_2(x)) \sin(2k+1)\pi x dx$$

и в силу леммы I

$$\left. \begin{aligned} f(u_1(x)) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(u_1', u_3', \dots) \sin(2k+1)\pi x, \\ f(u_2(x)) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(u_1'', u_3'', \dots) \sin(2k+1)\pi x, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

причем эти ряды сходятся абсолютно и равномерно при всяком  $x$ . Подставляя (32) и (33) в (31), интегрируя затем по  $x$  от 0 до 1 и принимая во внимание ортогональность и нормированность функций

$$\sqrt{2} \sin(2k+1)\pi x,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} [f_{2k+1}(u_1', u_3', \dots) - f_{2k+1}(u_1'', u_3'', \dots)]^2 \leq \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k+1}' - u_{2k+1}'')^2,$$

или, пользуясь символом расстояния в пространстве Гильберта,

$$r[f(u_1(x)), f(u_2(x))] \leq \alpha r[u_1(x), u_2(x)]. \quad (34)$$

Неравенство (34) мы будем называть условием Липшица.

## § 7. Теоремы существования

В §§ 4 и 5 мы показали, что задачу отыскания периодических решений уравнения (4) с граничными условиями (5), (6) § 1 можно свести к решению бесконечной системы интегральных уравнений. Пусть в уравнении (4) § 1<sup>1</sup>

$$a = 2m + 1 \quad (m \text{ целое число} > 0)$$

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \dots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}(t)}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2(t) = C^2(t),$$

причем все  $y_{2k+1}(t)$  суть периодические функции  $t$  с периодом 1, непрерывные в интервале  $0 \leq t \leq 1$ . Тогда соответствующая бесконечная система интегральных уравнений будет иметь вид

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1(\tau), z_3(\tau), \dots] d\tau, \quad (35)$$

<sup>1</sup> Число  $a$  здесь можно выбрать также равным  $\frac{2m+1}{q}$ , где  $q$  целое число  $\neq 0$ ; в дальнейшем доказательстве от этого изменятся при оценках только соответствующие постоянные.

где

$$G_{2k+1}(t, \tau) = \frac{\cos \left[ \frac{(2m+1)(2k+1)}{2\pi(2m+1)(2k+1)(-1)^{k_1+k}} \left( |t - \tau| - \frac{1}{2} \right) \right]}{2\pi(2m+1)(2k+1)(-1)^{k_1+k}}, \quad (36)$$

$$B_{2k+1}(t) = \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) \Phi_{2k+1}(\tau) d\tau, \quad (37)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 \Phi_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leq c^2. \quad (38)$$

Неравенство (38) вытекает из теоремы Dini.

Мы начнем с того, что докажем теорему существования для системы (35):

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ.** Система интегральных уравнений (35), при условии, что<sup>1</sup>

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 \Phi_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leq c^2 < \frac{(1 - \mu \lambda M)^2}{M^2} \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (39)$$

$$\mu < \min \left( \frac{1}{\lambda M}, \frac{1}{\alpha M \gamma_2} \right), \quad (40)$$

где

$$M = \frac{1}{2\pi(2m+1)} \quad (40')$$

( $\alpha$  коэффициент в условии Липшица), имеет решение  $z_{2k+1}(t) = \Phi_{2k+1}(t)$ , принадлежащее пространству  $A_3$ , причем все функции  $\Phi_{2k+1}(t)$  будут непрерывными в интервале  $[0 \leq t \leq 1]$  и периодическими с периодом 1, если этими же свойствами обладают функции  $\Phi_{2k+1}(t)$ .

**Доказательство.** Для доказательства теоремы мы воспользуемся методом последовательных приближений. Условимся  $p$ -ое приближение к функциям  $z_{2k+1}(t)$  обозначать индексом сверху  $z_{2k+1}^{(p)}(t)$ . Символ  $z^{(p)}(t)$  будет сокращенным обозначением  $p$ -ого приближения к точке  $z(t)$ . Доказательство мы разобьем на две части. В первой части мы покажем, что каждое приближение  $z^{(p)}(t)$  является точкой пространства  $A_3$ , причем

$$\omega^2[z^{(p)}(t), 0] < \frac{1 - (\mu \lambda M)^p}{1 - \mu \lambda M} c^2 M^2 \text{ при любом } p = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда непосредственно будет следовать, что и предел  $\lim_{p \rightarrow \infty} z^{(p)}(t)$ , если он существует, также принадлежит  $A_3$ , причем

$$\omega^2[z(t), 0] \leq 1.$$

Во второй части мы покажем, что предел  $\lim_{p \rightarrow \infty} z^{(p)}(t) = z(t)$  действительно существует.

<sup>1</sup> В формуле (39) величину  $C^2$  мы будем считать равной  $c^2 = \sup C^2(t)$  при  $0 \leq t \leq 1$ .

Значение постоянной  $\lambda$  будет указано ниже.



1. Из (36) и (40') имеем:

$$|G_{2k+1}(t, \tau)| \leq \frac{M}{2k+1}. \quad (41)$$

Положим в нулевом приближении

$$z_{2k+1}^{(0)}(t) = B_{2k+1}(t);$$

тогда из (37), (39) и (41) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 [z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 \left\{ \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) \Phi_{2k+1}(\tau) d\tau \right\}^2 \leq \\ &\leq M^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 \int_0^1 \Phi_{2k+1}^2(\tau) d\tau = \\ &= M^2 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 \Phi_{2k+1}^2(\tau) \right\} d\tau \leq c^2 M^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (39) и (42) вытекает, что точка  $z^{(0)}(t) = [z_1^{(0)}(t), z_3^{(0)}(t), \dots]$  принадлежит  $A_3$ , причем

$$\omega^2[z^{(0)}(t), 0] \leq c^2 M^2 = q^2 < 1 \text{ при } 0 \leq t \leq 1. \quad (43)$$

Положим

$$u_0(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}^{(0)}(t) \sin(2k+1)\pi x,$$

тогда, пользуясь неравенством Шварца и (43), найдем

$$\begin{aligned} |u_0(x, t)| &\leq \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} |z_{2k+1}^{(0)}(t)| = \sqrt{2} \sqrt{\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}^{(0)}(t) (2k+1)^3 \cdot \frac{1}{(2k+1)^3} \right\}^2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \omega[z^{(0)}(t), 0] \gamma_6 < \sqrt{2} \gamma_6 \text{ при всяком } x \text{ и при } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Выберем теперь число  $R = \sqrt{2} \gamma_6$ , тогда на основании леммы III получим

$$\rho^2[f(u_0(x, t)), 0] = \rho^2[f(z^{(0)}(t)), 0] \leq \lambda^2 \omega^2[z^{(0)}(t), 0], \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 16 \beta_2 \gamma_2^4, \quad \beta = \max(\beta_1, \beta_2) \\ \left. \begin{aligned} \beta_1 &= \max |f'(u)| \\ \beta_2 &= \max |f''(u)| \end{aligned} \right\} \text{ при } |u| \leq R. \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь для первого приближения находим

$$z_{2k+1}^{(1)}(t) - z_{2k+1}^{(0)}(t) = \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1^{(0)}(\tau), z_3^{(0)}(\tau), \dots] d\tau. \quad (46)$$

Из (41), (44), (46) выводим <sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Законность интегрирования в неравенствах (47) следует из леммы I.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 [z_{2k+1}^{(1)}(t) - z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2 &= \omega^2[z^{(1)}(t), z^{(0)}(t)] = \\
&= \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 \left\{ \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}(z^{(0)}) d\tau \right\}^2 \leq \\
&\leq \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^6 \int_0^1 G_{2k+1}^2(t, \tau) f_{2k+1}^2(z^{(0)}) d\tau \leq \\
&\leq \mu^2 M^2 \int_0^1 \rho^2[f(z^{(0)}), 0] d\tau \leq \mu^2 \lambda^2 M^2 q^2.
\end{aligned} \tag{47}$$

Пользуясь теоремой треугольника, находим:

$$\omega[z^{(1)}(t), 0] \leq \omega[z^{(1)}(t), z^{(0)}(t)] + \omega[z^{(0)}(t), 0]$$

или на основании (43) и (47)

$$\omega[z^{(1)}(t), 0] \leq (1 + \lambda \mu M) q^2 \quad (0 \leq t \leq 1). \tag{48}$$

Аналогичными рассуждениями докажем, что если

$$\omega[z^{(p)}(t), 0] \leq \frac{1 - (\mu \lambda M)^p}{1 - \mu \lambda M} \cdot q \quad (0 \leq t \leq 1),$$

то

$$\omega[z^{(p+1)}(t), 0] \leq \frac{1 - (\mu \lambda M)^{p+1}}{1 - \mu \lambda M} \cdot q \quad (0 \leq t \leq 1). \tag{49}$$

Из неравенства (49) вытекает, что каждое приближение  $z^{(p)}(t)$  принадлежит пространству  $A_3$  и притом при всяком  $0 \leq t \leq 1$ . Если существует предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} z^{(p)}(t) = z(t),$$

то очевидно

$$\omega[z(t), 0] \leq \frac{1}{1 - \mu \lambda M} \cdot q < 1 \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{50}$$

и, следовательно, точка  $z(t)$  будет обязательно принадлежать пространству  $A_3$  при любом  $0 \leq t \leq 1$ .

Проверим, удовлетворяет ли точка  $z(t)$  (если предел существует, что мы пока предположим) условиям (44) и (45).

Из (50) и неравенства Шварца легко найдем

$$|u(x, t)| \leq \sqrt{2} \gamma_6 \omega[z(t), 0] < \sqrt{2} \gamma_6$$

при всяком  $x$  и при  $0 \leq t \leq 1$ .

Таким образом, полагая  $R = \sqrt{2} \gamma_6$ , находим по уравнениям (45) число  $\lambda$  и по (31) число  $\alpha$ , затем по (40) выбираем  $\mu$  и наконец из (39) выбираем  $c$ ; тогда каждое приближение будет удовлетворять (45) и условию

$$\omega[z^{(p)}(t), 0] < 1,$$

и все операции, которые мы производили, оправданы.

2. Теперь остается доказать существование предела

$$\lim_{p \rightarrow \infty} z_{2k+1}^{(p)}(t) = z_{2k+1}(t) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Полагая, как и раньше,

$$z_{2k+1}^{(0)}(t) = \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) \Phi_{2k+1}(\tau) d\tau,$$

оцениваем расстояние точки  $z^{(0)}$  от начала координат в Гильбертовом пространстве

$$\begin{aligned} r^2[z^{(0)}(t), 0] &= \sum_{k=0}^{\infty} [z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) \Phi_{2k+1}(\tau) d\tau \right\}^2 \leq \\ &\leq M^2 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_{2k+1}^2(\tau)}{(2k+1)^2} \right\} d\tau \leq M^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} \right] \cdot \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 \Phi_{2k+1}^2(\tau) d\tau \leq \\ &\leq M^2 \gamma_6^2 c^2 \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned} \quad (51)$$

Предположим теперь, что полином  $f(u)$  удовлетворяет неравенству (31), если  $|u_1|$  и  $|u_2| \leq \sqrt{2} \gamma_6$ . Тогда для каждого приближения  $z^{(p)}$  будет справедливо условие Липшица (34).

Применяя на этом основании условие Липшица к точкам  $z^{(0)}$  и 0 Гильбертова пространства, получим:

$$r[f(z^{(0)}(t)), 0] \leq \alpha r[z^{(0)}(t), 0] \leq \alpha M c \gamma_6. \quad (52)$$

Оцениваем теперь расстояние  $r[z^{(1)}(t), z^{(0)}(t)]$ . Имеем<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} r[z^{(1)}(t), z^{(0)}(t)] &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} [z_{2k+1}^{(1)}(t) - z_{2k+1}^{(0)}(t)]^2} = \\ &= \mu \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}(z^{(0)}) d\tau \right\}^2} \leq \\ &\leq \mu \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 G_{2k+1}^2(t, \tau) f_{2k+1}^2(z^{(0)}) d\tau} \leq \mu M^2 \alpha c \gamma_2 \gamma_6 \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned} \quad (53)$$

Точно так же находим:

$$\begin{aligned} r[z^{(2)}(t), z^{(1)}(t)] &= \mu \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) [f_{2k+1}(z^{(1)}) - f_{2k+1}(z^{(0)})] d\tau \right\}^2} \leq \\ &\leq (\mu \alpha M \gamma_2)^2 M c \gamma_6. \end{aligned}$$

Применяя метод индукции, получим неравенство

$$r[z^{(p+1)}(t), z^{(p)}(t)] \leq (\mu \alpha M \gamma_2)^{p+1} M c \gamma_6 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (54)$$

<sup>1</sup> Непрерывность функций  $z_{2k+1}^{(p)}(t)$  каждого приближения была доказана выше, так же как непрерывность функций  $f_{2k+1}[z_1^{(p)}(t), z_3^{(p)}(t), \dots]$ , а следовательно, операция интегрирования законна.

Пусть теперь  $z^{(j)}, z^{(j+1)}, \dots, z^{(j+p)}$  — точки Гильбертова пространства, определяемые последовательными приближениями из системы (35).

Из теоремы треугольника имеем:

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) \leq r(z^{(j)}, z^{(j+1)}) + \dots + r(z^{(j+p-1)}, z^{(j+p)}).$$

Подставляя в правую часть этого неравенства формулу (54), получим

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) \leq M c \gamma_6 \delta^{j+1} \frac{1 - \delta^p}{1 - \delta}, \quad (55)$$

где  $\delta = \mu \alpha M \gamma_2$ .

Если теперь  $\mu$  удовлетворяет неравенству (40), т. е.

$$\mu < \frac{1}{\alpha M \gamma_2},$$

тогда  $\delta < 1$  и из (55) находим:

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) \leq M c \gamma_6 \frac{\delta^{j+1}}{1 - \delta}.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было число  $\varepsilon > 0$ , можно, выбрав  $j$  достаточно большим, сделать

$$r(z^{(j+p)}, z^{(j)}) < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (56)$$

каково бы ни было число  $p$ . Для этого должно быть

$$j + 1 > \frac{\lg \varepsilon + \lg(1 - \delta) - \lg(M c \gamma_6)}{\lg \delta}.$$

Теперь мы можем утверждать, что последовательность точек  $z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(p)}, \dots$  есть фундаментальная последовательность. Вследствие полноты Гильбертова пространства всякая фундаментальная последовательность есть в то же время сходящаяся последовательность. Таким образом доказано существование предела последовательности точек  $z^{(0)}, z^{(1)}, \dots$ , т. е.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} z^{(p)}(t) = z(t),$$

причем каждая функция  $z_{2k+1}^{(p)}(t)$  стремится к своему пределу  $z_{2k+1}(t)$  равномерно в промежутке  $0 \leq t \leq 1$ .

Остается показать, что функции  $z_{2k+1}^{(p)}(t)$  удовлетворяют в пределе, т. е. когда  $p \rightarrow \infty$ , системе (35). Имеем:

$$z_{2k+1}^{(p)}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}(z_1^{(p-1)}, z_3^{(p-1)}, \dots) d\tau \quad (k=0, 1, \dots).$$

Переходя в обеих частях этого равенства к пределу при  $p \rightarrow \infty$ , что законно в силу равномерного стремления функций  $z_{2k+1}^{(p)}(t)$  к пределу, получим:

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1, z_3, \dots] d\tau \quad (k=0, 1, \dots),$$



причем все функции  $z_{2k+1}(t)$  будут непрерывны при  $0 \leq t \leq 1$  и периодичны с периодом 1<sup>1</sup>.

Таким образом теорема существования доказана.

Из только что доказанной теоремы существования непосредственно вытекает теорема существования для уравнения в частных производных (4) с условиями (5), (6) § 1, которую можно формулировать следующим образом:

**II ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ.** Если  $a = 2m + 1$  ( $m$  — целое число),

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \dots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq \alpha |u_1 - u_2| \quad \text{при} \quad |u| \leq R,$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}(t)}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leq c^2$$

(постоянная  $c$  достаточно мала), причем функция  $\Phi(x, t)$  непрерывна относительно  $t$  при  $0 \leq t \leq 1$  и  $\Phi(x, t) = \Phi(x, t+1)$ , то уравнение (4) с условиями (5), (6) § 1, при  $\mu$  достаточно малом, имеет решение  $u(x, t)$  периодическое в  $t$  с периодом 1, непрерывное вместе со своими производными до 2-го порядка включительно в области  $\bar{\Omega}$ <sup>3</sup>.

В первой части доказательства I теоремы существования мы показали, что  $u(x, t) \in A_3$ , а следовательно, как  $u(x, t)$ , так и производная  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  непрерывны при любом  $x$  и  $t$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  может быть вычислена дифференцированием ряда Фурье для  $u(x, t)$ .

Из уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(x, t) + \mu f(u)$$

теперь следует, что и  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  непрерывна также при любом  $x$  и  $t$ , так как мы можем ряд Фурье для  $u(x, t)$  подставить в правую часть уравнения, которая будет непрерывной функцией  $x$  и  $t$  в области  $\bar{\Omega}$ .

## § 8. Теоремы единственности

**I ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ.** При соблюдении условий I теоремы существования система интегральных уравнений (35) допускает только одно непрерывное решение  $z(t)$ , принадлежащее  $A_3$ , для которого расстояние

$$\omega[z(t), 0] < 1.$$

<sup>1</sup> Периодичность функций  $z_{2k+1}(t)$  вытекает из свойства функций Грина  $G_{2k+1}(t, \tau)$ , отмеченного в конце § 5. Непрерывность функций  $z_{2k+1}(t)$  следует из свойств рядов  $f_{2k+1}(z_1, z_2, \dots)$  и функций  $G_{2k+1}(t, \tau)$ , благодаря которым каждое  $p$ -ое приближение  $z_{2k+1}^{(p)}(t)$  непрерывно, а следовательно, и предел  $\lim_{p \rightarrow \infty} z_{2k+1}^{(p)}$  в силу равномерного стремления к нему.

<sup>2</sup> См. сноску на стр. 27.

<sup>3</sup> См. сноску на стр. 15.

Действительно, предположим противное, т. е. что кроме непрерывного решения  $z(t) = \{z_1(t), z_3(t), \dots\}$ , найденного выше, существует другое непрерывное решение системы (35)  $Z(t) = \{Z_1(t), Z_3(t), \dots\}$  тоже  $\in A_3$  и для которого расстояние  $\omega[Z(t), 0] < 1$ .

Так как  $Z(t) \neq z(t)$  по предположению, то

$$r[Z(t), z(t)] = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} [Z_{2k+1}(t) - z_{2k+1}(t)]^2} \neq 0 \quad (57)$$

по крайней мере в некоторой части  $\omega$  интервала  $0 \leq t \leq 1$ .

Расстояние  $r[Z, z]$  есть непрерывная функция  $t$  во всем интервале  $0 \leq t \leq 1$ , так как обе точки  $\in A_3$  и все  $z_{2k+1}(t)$ ,  $Z_{2k+1}(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) суть непрерывные функции  $t$ . На этом основании мы можем утверждать, что существует верхняя грань  $\eta$  для расстояния  $r[Z, z]$  при  $0 \leq t \leq 1$ , т. е. что

$$r[Z(t), z(t)] \leq \eta, \text{ когда } t \in \omega,$$

причем

$$r[Z(t_1), z(t_1)] = \eta \quad (58)$$

по крайней мере в одной точке  $t_1 \in \omega$ .

Имеем:

$$Z_{2k+1}(t) - z_{2k+1}(t) = \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) [f_{2k+1}(Z_1, Z_3, \dots) - f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)] d\tau \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (59)$$

В силу того, что  $\omega[Z(t), 0] < 1$ , а следовательно,

$$|U(x, t)| \leq \sqrt{2} \gamma_0, \text{ где } U(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} Z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x,$$

мы можем применить к точкам  $Z$  и  $z$  условие Липшица (34); получим:

$$r[f(Z), f(z)] \leq \alpha r(Z, z).$$

Далее, из (59) находим:

$$r(Z, z) \leq \mu M \gamma_2 \alpha \eta. \quad (60)$$

Выбрав теперь опять

$$\mu = \frac{\theta}{M \gamma_2 \alpha} \quad (0 < \theta < 1),$$

сейчас же из (60) получим:

$$r(Z, z) \leq \theta \eta < \eta,$$

что противоречит (58), и следовательно, теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает теорема единственности для уравнения в частных производных, которую можно формулировать следующим образом:

**II ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ.** Если соблюдаются условия II теоремы существования, то задача (4), (5), (6) § 1 допускает при  $\mu$

достаточно малом только одно непрерывное решение  $u(x, t)$  вида (13) § 4, принадлежащее  $A_3$ , и для которого удовлетворялось бы неравенство  $|u(x, t)| \leq \sqrt{2} \gamma_6^{-1}$ .

## II МЕТОД <sup>2</sup>

### § 9. Приведение задачи к одному интегральному уравнению

В этом параграфе мы покажем, каким образом можно свести задачу к одному нелинейному интегральному уравнению. Для этой цели мы укажем эффективный метод построения некоторой функции  $K(x, \xi; t, \tau)$ , которую будем называть функцией Грина.

Теорема существования II говорит нам, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (2m+1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(u)$$

при соблюдении соответствующих условий имеет периодическое решение  $u(x, t)$ , разлагающееся в ряд только по

$$\sin(2k+1)\pi x.$$

Мы докажем теперь, что это решение является также решением нелинейного интегрального уравнения для  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \int_0^1 K(x, \xi; t, \tau) [\Phi(\xi, \tau) + \mu f(u(\xi, \tau))] d\xi d\tau, \quad (61)$$

где

$$K(x, \xi; t, \tau) = \frac{2}{(-1)^m \pi (2m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi \xi \cos \left[ \pi(2m+1)(2k+1) \left( |t-\tau| - \frac{1}{2} \right) \right]}{(-1)^k (2k+1)}$$

Это утверждение эквивалентно следующей теореме:

**ТЕОРЕМА.** Пусть условия I теоремы существования выполнены и пусть  $z_{2k+1}(t)$  ( $k=0, 1, \dots$ ) есть решение системы интегральных уравнений (35)

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1(\tau), z_3(\tau), \dots] d\tau \quad (k=0, 1, \dots),$$

принадлежащее пространству  $A_3$ .

Тогда функция

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x$$

удовлетворяет интегральному уравнению (61).

<sup>1</sup> Это следует непосредственно из выражения функции  $u(x, t)$  через коэффициенты  $z_{2k+1}(t)$ .

<sup>2</sup> Этот метод мы называем вторым, так как можно было бы получить теоремы существования и единственности § 8, исходя непосредственно из свойств функции  $K(x, \xi; t, \tau)$ , которую мы дальше вводим, и не прибегая к предыдущим теоремам о бесконечной системе (35).

Доказательство. Умножаем каждое уравнение системы (35) соответственно на  $\sqrt{2} \sin(2k+1)\pi x$  и суммируем по  $k$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x \equiv u(x, t) = \\ & = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) \sin(2k+1)\pi x [\Phi_{2k+1}(\tau) + \mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)] d\tau. \quad (62) \end{aligned}$$

Так как

$$|G_{2k+1}(t, \tau)| \leq \frac{M}{2k+1},$$

$$|\Phi_{2k+1}(\tau) + \mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)| \leq \frac{c_1}{(2k+1)^2} \quad (0 \leq t, \tau \leq 1),$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(2k+1)\pi x G_{2k+1}(t, \tau) [\Phi_{2k+1}(\tau) + \mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)]$$

сходится абсолютно и равномерно в области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t, \tau \leq 1$ . Вследствие равномерной сходимости этого ряда мы можем проинтегрировать его почленно по  $\tau$ , т. е., иными словами, в (62) мы можем поменять порядок суммирования и интегрирования, после чего получим

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sqrt{2} \int_0^1 d\tau \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2k+1)\pi x G_{2k+1}(t, \tau) [\Phi_{2k+1}(\tau) + \\ + \mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)]. \quad (63) \end{aligned}$$

Заменяя в (63) величины  $\Phi_{2k+1}(\tau)$  и  $f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)$  их значениями

$$\begin{aligned} \Phi_{2k+1}(\tau) &= \sqrt{2} \int_0^1 \Phi(\xi, \tau) \sin(2k+1)\pi \xi d\xi; \\ f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots) &= \sqrt{2} \int_0^1 f(u, \tau) \sin(2k+1)\pi \xi d\xi, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \int_0^1 d\tau \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 [\Phi(\xi, \tau) + \\ & + \mu f(u)] G_{2k+1}(t, \tau) \sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi \xi d\xi. \quad (63') \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi \xi \cos \left[ \pi(2m+1)(2k+1) \left( |t-\tau| - \frac{1}{2} \right) \right]}{(-1)^k (2k+1)}, \quad (64)$$

который мы обозначим через  $\pi(2m+1)(-1)^m K(x, \xi; t, \tau)$ . Ряд (64)



сходится при любых значениях  $x, \xi, t, \tau$ , так как он может быть представлен в виде суммы четырех сходящихся рядов:

$$\begin{aligned} \pi(2m+1)(-1)^m K(x, \xi; t, \tau) = & \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega_j}{(-1)^k(2k+1)} - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{j=3}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega_j}{(-1)^k(2k+1)}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pi(x - \xi - T), & \omega_2 &= \pi(x - \xi + T), \\ \omega_3 &= \pi(x + \xi + T), & \omega_4 &= \pi(x + \xi - T), \\ T &= (2m+1) \left( |t - \tau| - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Функция  $K(x, \xi; t, \tau)$ , рассматриваемая как функция от  $\xi$ , абсолютно интегрируема по  $\xi$  в любом конечном промежутке и при всяких значениях  $x, t, \tau$ , так как сумма ряда (65) выражается формулой

$$\left. \begin{aligned} (2m+1)(-1)^m K(x, \xi; t, \tau) &= \frac{1}{16} \sum_{j=1}^2 y(\omega_j) - \frac{1}{16} \sum_{j=3}^4 y(\omega_j), \\ \text{где} \quad y(\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{если } 2n\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{»} \quad \omega = n\pi - \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{»} \quad (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2n+2)\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$n$  — целое число.

На этом основании [4] мы можем интегрировать почленно, по  $\xi$ , ряд Фурье этой функции, т. е. ряд (64).

По этой же причине мы имеем право интегрировать почленно по  $\xi$  ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi \xi G_{2k+1}(t, \tau) \left[ \Phi(\xi, \tau) + \mu f(u(\xi, \tau)) \right].$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в (63'), получим:

$$u(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, \xi; t, \tau) [\Phi(\xi, \tau) + \mu f(u)] d\xi d\tau,$$

что и требовалось доказать<sup>1</sup>.

Ядро  $K(x, \xi; t, \tau)$  при фиксированных  $x, t$ , рассматриваемое как функция  $\xi, \tau$ , состоит из кусков плоскостей, параллельных плоскости

<sup>1</sup> В случае  $a = \frac{2m+1}{q}$  задача также может быть сведена к одному интегральному уравнению аналогичным приемом. Соответствующее ядро будет уже, конечно, другое.

$\xi\tau$ . Оно имеет конечные разрывы вдоль параллельных прямых, совпадающих с некоторыми из характеристик:

$$\begin{aligned}\xi - (2m + 1)\tau &= \text{const}, \\ \xi + (2m + 1)\tau &= \text{const}.\end{aligned}$$

Эти прямые определяются уравнениями:

$$\omega_j = n\pi - \frac{\pi}{2} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$n$  — целое число или нуль.

### § 10. Явление квазирезонанса

В этом параграфе мы укажем характерные особенности изучаемой задачи, а также ее физический смысл.

Возможность доказать теорему существования по методу последовательных приближений была основана на свойствах пространства  $A_3$ , а для этого в свою очередь необходимо, чтобы функции Грина удовлетворяли оценке вида  $|G_k(t, \tau)| \leq \frac{M}{k}$ . Если  $a$  иррациональное число, то оценка функций  $G_k$  имеет вид:

$$|G_k(t, \tau)| \leq \frac{M}{k \left| \sin \frac{ak\pi}{2} \right|},$$

при этом  $\left| \sin \frac{ak\pi}{2} \right| \neq 0$ , каково бы ни было  $k = 1, 2, \dots$

Пусть у нас имеется система  $n$  уравнений с  $n$  функциями:

$$z_k(t) = \int_0^1 G_k(t, \tau) [\Phi_k(\tau) + \mu f_k(z_1, \dots, z_n)] d\tau \quad (k = 1 \dots n). \quad (67)$$

Выбирая из  $n$  чисел

$$\left| \sin \frac{ak\pi}{2} \right| \quad (k = 1 \dots n)$$

наименьшее и обозначая его через  $\varepsilon$ , получим следующую оценку функций  $G_k$ :

$$|G_k(t, \tau)| \leq \frac{M}{k\varepsilon} = \frac{M_1}{k} \quad (k = 1 \dots n).$$

Поэтому любая конечная система интегральных уравнений (67) имеет<sup>1</sup> при  $\mu$  достаточно малом решение, во всяком случае при произвольном  $a$ , не равном целому или рациональному числу, и при известных условиях относительно функций  $f_k$ , что легко доказывается методом последовательных приближений.

Таким образом существенным затруднением при иррациональном  $a$  является предельный переход  $n \rightarrow \infty$ . При этом мы видим, что каждая функция  $G_k$  в отдельности ограничена, но совокупность всех функ-

<sup>1</sup> Если  $\Phi_k(\tau)$  обладают достаточно хорошими свойствами.

ций  $G_k$  не ограничена. Это явление мы условимся называть «квази-резонансом».

Основываясь на этих соображениях, еще нельзя сделать, однако, заключения, что при иррациональном  $a$  периодических решений не существует, хотя такое предположение не лишено оснований.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t), \quad (68)$$

где

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{kj} \sin k\pi x e^{j2\pi i t} \quad (69)$$

есть сходящийся абсолютно и равномерно в  $\bar{\Omega}$  ряд Фурье.

Пусть требуется найти непрерывное, вместе с производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области  $\bar{\Omega}$ , решение уравнения (68), удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (70)$$

и условию периодичности

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{aligned} \right\}. \quad (71)$$

Очевидно, если такое решение существует, то его можно разложить в сходящийся ряд Фурье вида:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{kj} \sin k\pi x e^{j2\pi i t}. \quad (72)$$

Умножим обе части уравнения (68) на  $e^{j2\pi i t} \sin k\pi x$  и затем проинтегрируем по области  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{j2\pi i t} \sin k\pi x \, dx \, dt = c_{kj}. \quad (73)$$

Производя в (73) интегрирование по частям и принимая во внимание граничные условия (70) и (71), получим:

$$\pi^2 \gamma_{kj} = \frac{c_{kj}}{k^2 a^2 - 4j^2},$$

или, полагая  $a = 2b$ ,

$$4\pi^2 \gamma_{kj} = \frac{c_{kj}}{k^2 b^2 - j^2}. \quad (74)$$

Из формулы (74) заключаем:

I. Если

$$b = \frac{p}{q} \quad ((p, q) = 1),$$

причем все

$$|c_{kj}| \neq 0 \quad (k = 1 \dots \infty; j = 0, \pm 1, \dots),$$

то задача (68), (70), (71) не имеет решения, так как

$$k^2 \frac{p^2}{q^2} - j^2 = 0,$$

если

$$kp = \pm jq,$$

т. е. имеет место резонанс.

Очевидно резонанса не будет, если все коэффициенты  $c_{kj}$ , у которых индекс  $k$  делится на  $q$ , равны нулю, или если все коэффициенты  $c_{kj}$ , у которых индекс  $j$  делится на  $p$ , равны нулю. В частности, если  $b = \frac{2m+1}{2}$  ( $m$  — целое число) и если все коэффициенты  $|c_{2k,j}| = 0$ , то резонанса не будет. Именно для этого случая нами была доказана теорема существования в § 7.

II. Если  $b$  иррациональное число, причем  $|c_{kj}| \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots = 0, \pm 1, \dots$ ), то знаменатель в формуле (74) не может обратиться в нуль. Тем не менее оказывается, что при некоторых иррациональных значениях  $b$ , образующих множество мощности континуума, имеет место квазирезонанс и задача (68), (70), (71) не имеет решения. Случаю II соответствует:

**ТЕОРЕМА НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ.** Уравнение (68) с граничными условиями (70), (71), при условии

$$|c_{kj}| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots; j = 0, \pm 1, \dots)$$

при некоторых иррациональных значениях  $a$ , образующих множество мощности континуума, не имеет решения, непрерывного вместе с производными  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в области  $\bar{\Omega}$ .

**Доказательство.** Для того чтобы ряд (72) был сходящимся, необходимо, чтобы

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ j \rightarrow \pm\infty}} |\gamma_{kj}| = 0.$$

Поэтому для доказательства теоремы несуществования достаточно показать, что среди коэффициентов  $\gamma_{kj}$  существует счетное множество коэффициентов, удовлетворяющих неравенству

$$|\gamma_{kj}| > N,$$

где  $N$  — произвольное положительное число.

Рассмотрим множество функций

$$f_{kj}(\nu) = k^2 \nu^2 - j^2 \quad (k = 1, 2, \dots; j = 0, \pm 1, \dots).$$

Рассмотрим также множество нулей всех функций  $f_{kj}$ , которое обозначим через  $S$ . Множество  $S$  есть, очевидно, множество всех рациональ-

ных чисел. Следовательно, точки множества  $S$  повсюду плотно заполняют прямую.

Везде в дальнейшем, для простоты, будем считать  $\nu > 1$ .

Возьмем произвольное иррациональное число  $\alpha > 1$ . Пусть этому числу соответствует бесконечная непрерывная дробь

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots$$

Выберем какие-либо два индекса  $k_1, j_1$ , удовлетворяющие условиям

$$k_1 > 0, \quad \frac{j_1}{k_1} = q_1.$$

Дадим теперь  $\nu$  такое иррациональное значение, чтобы дробь<sup>1</sup>

$$|\gamma_{k_1 j_1}| = \frac{|c_{k_1 j_1}|}{|k_1^2 \nu^2 - j_1^2|} > N.$$

Полагая

$$\frac{|c_{k_1 j_1}|}{k_1 + j_1} = \eta_1,$$

имеем

$$|\gamma_{k_1 j_1}| > \frac{\eta_1}{|k_1 \nu - j_1|}.$$

Выбираем теперь  $\nu$  так, чтобы

$$\frac{\eta_1}{|k_1 \nu - j_1|} > N,$$

откуда

$$\frac{j_1}{k_1} < \nu < \frac{j_1}{k_1} + \varepsilon_1,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\eta_1}{N k_1}.$$

Выбираем теперь какое-либо целое положительное число  $p_1$ , удовлетворяющее единственному условию

$$q_1 + \frac{1}{p_1} < \frac{j_1}{k_1} + \varepsilon_1, \quad \text{или} \quad p_1 > \frac{1}{\varepsilon_1}$$

и строим интервал  $(A_1, B_1)$ , где

$$A_1 = \frac{j_1}{k_1}, \quad B_1 = \frac{j_1}{k_2} = q_1 + \frac{1}{p_1}.$$

Выбирая за  $\nu = \nu_1$  любую иррациональную точку интервала  $(A_1, B_1)$ , будем иметь

$$|\gamma_{k_1 j_1}| > N. \quad (75)$$

Берем теперь какие-либо два индекса  $k_3, j_3$ , удовлетворяющие условиям:

$$k_3 > 0, \quad \frac{j_3}{k_3} = q_1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2}.$$

<sup>1</sup> Множитель  $4\pi^2$  при  $\gamma_{kj}$  в формуле (74) мы опускаем.



По свойству подходящих дробей

$$\frac{j_3}{k_3} \in (A_1, B_1).$$

Дадим теперь  $\nu$  такое иррациональное значение, чтобы неравенство (75) сохранялось и чтобы  $|\gamma_{k_3 j_3}| > N$ .

Полагая

$$\frac{|c_{k_3 j_3}|}{k_3 + j_3} = \eta_3$$

и повторяя те же рассуждения, найдем, что при любом иррациональном числе

$$\nu_3 \in (A_1, B_1) \cdot (A_3, B_3),$$

где

$$A_3 = \frac{j_3}{k_3}, \quad B_3 = q_1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_2} \quad \left(p_2 > \frac{1}{\varepsilon_3}\right),$$

будут соблюдаться неравенства:

$$|\gamma_{k_1 j_1}| > N, \quad |\gamma_{k_3 j_3}| > N.$$

Отсюда по индукции вытекает, что можно построить последовательность иррациональных точек  $\{\nu_{2i+1}\}$  и интервалов  $\left(\frac{j_{2i+1}}{k_{2i+1}}, \frac{j_{2i+2}}{k_{2i+2}}\right)$  такую, что

$$|\gamma_{k_{2n+1} j_{2n+1}}| = \frac{|c_{k_{2n+1} j_{2n+1}}|}{|k_{2n+1}^2 \nu_{2i+1}^2 - j_{2n+1}^2|} > N \quad \text{при } n = 1, \dots, i.$$

В силу выбора индексов  $k_{2n+1}, j_{2n+1}$  последовательность точек  $\{\nu_{2i+1}\}$  будет иметь точку сгущения  $\nu$ , принадлежащую одновременно всем интервалам  $(A_{2i+1}, B_{2i+1})$ , т. е.

$$\nu \in \bigcap_{m=0}^{\infty} (A_{2m+1}, B_{2m+1})$$

и для которой все

$$|\gamma_{k_{2n+1} j_{2n+1}}| > N \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Эта точка сгущения будет иррациональным числом

$$\nu = q_1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} + \dots$$

Каждому иррациональному числу  $\alpha > 1$  мы можем одно-однозначно сопоставить иррациональное число  $\nu$ .

Отсюда вытекает, что множество иррациональных чисел  $\alpha$ , при которых задача (68), (70), (74) не имеет решения, имеет мощность континуума, что и требовалось доказать.

## § 11. Пример несуществования периодических решений

Основываясь на теореме несуществования периодических решений, доказанной в предыдущем параграфе, легко построить сколько угодно примеров нелинейных уравнений, содержащих малый параметр  $\mu$ ,

которые заведомо не имеют периодических решений, являющихся голоморфными функциями от  $\mu$ , несмотря на то что соответствующие линейные уравнения имеют периодическое решение. В этом параграфе мы рассмотрим пример, из которого вместе с тем будет виден и общий путь для построения подобных примеров.

Теорема несуществования сохраняет свою силу и в том случае, если модули некоторых из коэффициентов  $c_{kj}$  равны нулю. Существенным является лишь следующее: множество нулей всех функций  $f_{kj}(\nu) = k^2 \nu^2 - j^2$ , у которых индексы  $k, j$  принимают такие значения, при которых  $|c_{kj}| \neq 0$ , должно содержать точки, повсюду плотно заполняющие прямую или по крайней мере какой-нибудь отрезок прямой. Тогда на этом отрезке всегда найдутся иррациональные значения  $a$ , при которых сколь угодно большое число коэффициентов  $\gamma_{kj}$  (печислимое множество) будет по модулю больше, чем произвольное число  $N$ .

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu u^2 \quad (76)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Будем искать решение задачи (76), (70), (71) в виде ряда

$$U(x, t, \mu) = u_0(x, t) + \mu u_1(x, t) + \dots \quad (77)$$

Функции  $u_0$  и  $u_1$  должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= \Phi(x, t) \\ u_0(0, t) &= 0, \quad u_0(1, t) = 0; \\ u_0(x, 0) &= u_0(x, 1) \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u_0}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= u_0^2(x, t) \\ u_1(0, t) &= 0, \quad u_1(1, t) = 0; \\ u_1(x, 0) &= u_1(x, 1) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Пусть теперь  $\theta(t)$  будет функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\theta(t) = \theta(t+1)$ ;
- 2)  $\theta(t)$  непрерывна вместе с производными не ниже 2-го порядка;

- 3) пусть  $\theta^2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{h \cdot 2\pi i t}$  и пусть все коэффициенты  $q_k$  вещественны

и отличны от нуля:

$$q_k \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Положим теперь:

$$\Phi(x, t) = \sin \pi x \left( \frac{d^2 \theta}{dt^2} + a^2 \pi^2 \theta \right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при таком выборе функции  $\Phi(x, t)$  линейное уравнение (78) имеет при любом  $a$  периодическое решение

$$u_0(x, t) = \theta(t) \sin \pi x. \quad (80)$$

Докажем теперь, что уравнение для  $u_1(x, t)$ , т. е. (79), не имеет решения, разлагающегося в сходящийся ряд Фурье вида

$$u_1(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{kj} \sin j \pi x e^{k^2 \pi i t}. \quad (81)$$

Действительно, разложение функции  $u_0^2(x, t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} u_0^2(x, t) &= \sin^2 \pi x \theta^2(t) = \\ &= -\frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{q_k}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \sin(2j+1)\pi x e^{k^2 \pi i t}. \end{aligned} \quad (82)$$

Подставляя (81) и (82) в уравнение (79) и сравнивая коэффициенты, находим:

$$\gamma_{2j+1, k} = \frac{p_j q_k}{(2j+1)^2 a^2 - k^2} \quad (\gamma_{2j, k} = 0),$$

где

$$p_j = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)}.$$

Покажем теперь, что надлежащим выбором числа  $a$  можно сколь угодно большое число коэффициентов (бесконечное множество) сделать большими произвольного числа  $N$ . Множество нулей всех функций

$$f_{2j+1, k}(\rho) = (2j+1)^2 \rho^2 - k^2 \quad (j = 0, 1, \dots; k = 0, \pm 1, \dots)$$

есть множество всех целых чисел и всех дробей с нечетными знаменателями. Точки этого множества повсюду плотно лежат на прямой. Этого обстоятельства уже достаточно, чтобы теорема несуществования, доказанная в предыдущем параграфе, была применима к этому случаю.

Таким образом из этого примера мы видим, что теорию периодических решений, построенную Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений, в некоторых случаях нельзя распространить на уравнения в частных производных.

Научно-исслед. институт  
математики и механики  
Ленинградск. гос. университета  
им. А. С. Бубнова.

## ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> E. H ö l d e r, Mathematische Untersuchungen des Himmelsmechanik, Math. Zeit., Bd. 30, Heft 2—3, 1929.
- <sup>2</sup> А. В и т т, Распределенные автоколебательные системы, Журн. техн. физики, т. IV, вып. 1, 1934.
- <sup>3</sup> A. W i n t n e r, Upon a theory of infinite systems of non linear implicit and differential equations, Amer. Journal Math. 53, pp. 241—257 (1931).
- <sup>4</sup> В а л л е - П у с с е н, Курс анализа бесконечно-малых, том II, гл. 4, стр. 142, ГТТИ, 1933.

## N. ARTEMIEV. ÜBER DIE PERIODISCHEN LÖSUNGEN DER NICHTLINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

## ZUSAMMENFASSUNG

Viele Aufgaben der Schwingungstheorie führen zur Untersuchung der periodischen Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Die nichtlineare Aufgabe über die Schwingungen der Saite ist eine Aufgabe solcher Art, welche man in folgender Weise formulieren kann:

Man finde eine Funktion  $u(x, t)$  welche [der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(u) \quad (1)$$

[ $a$  ist eine Konstante,  $\mu$  ein kleiner Parameter,  $f(u)$  ein Polynom,  $\Phi$  eine periodische Funktion der Zeit  $t$ , d. h.  $\Phi(x, t) = \Phi(x, t + 1)$ ], den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (2)$$

und den Bedingungen der Periodizität

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

genügt, und die nebst ihren Ableitungen bis zur 2-ten Ordnung<sup>1</sup> im geschlossenen Gebiete  $\bar{\Omega} \left\{ \begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq t \leq 1 \end{aligned} \right.$  stetig ist.

Für die Lösung unserer Aufgabe benutzen wir zwei Methoden, die miteinander eng verbunden sind. Die erste Methode besteht in der Zurückführung der Aufgabe auf ein unendliches System von Integralgleichungen, für welches wir den Existenzsatz vermittels sukzessiver Annäherung beweisen. Die zweite Methode besteht darin, dass man eine Greensche Funktion in effektiver Weise konstruiert. Vermittels dieser Greenschen Funktion wird das Problem auf die Lösung einer nichtlinearen Integralgleichung zurückgeführt.

<sup>1</sup> Unter partiellen Ableitungen 2-ter Ordnung werden wir nur diejenigen verstehen, welche in die Gleichung (1) eingehen, d. h.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

## I Methode

Wir suchen die Gleichungen (1), (2), (3) durch Fourierreihe von der Form

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin k\pi x \quad (4)$$

zu befriedigen. Durch Einsetzung der Reihe (4) in die Gleichungen (1), (2), (3) und Vergleichung der Koeffizienten von  $\sin k\pi x$  erhält man das unendliche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{z}_k + \pi^2 a^2 k^2 z_k = \Phi_k(t) + \mu f_k(z_1, z_2, \dots) \quad (5)$$

mit den Randbedingungen der Periodizität

$$\begin{aligned} z(0) &= z(1) \\ \dot{z}(0) &= \dot{z}(1) \end{aligned} \quad (6)$$

Hier sind  $\Phi_k$  die Fourierkoeffizienten der Funktion  $\Phi(x, t)$ ,  $f_k(z_1, z_2, \dots)$  die Fourierkoeffizienten der Funktion  $f[u(x, t)]$ , die Potenzreihen von unendlich vielen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots$  darstellen<sup>1</sup>. Vermittels der Green'schen Funktionen

$$G_k(t, \tau) = \frac{\cos \omega_k \left( t - \tau - \frac{1}{2} \right)}{2 \omega_k \sin \frac{\omega_k}{2}}, \quad 0 \leq t, \tau \leq 1, \quad \omega_k = \pi a k$$

führen wir das System von Differentialgleichungen (5), mit den Randbedingungen (6) auf ein unendliches System von nichtlinearen Integralgleichungen

$$z_k(t) = B_k(t) + \mu \int_0^1 G_k(t, \tau) f_k(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots) d\tau \quad (k = 1 \dots \infty) \quad (7)$$

zurück, wo

$$B_k(t) = \int_0^1 G_k(t, \tau) \Phi_k(\tau) d\tau \quad (k = 1 \dots \infty). \quad (7')$$

Die Funktionen  $G_k$  erfüllen die Ungleichungen

$$|G_k(t, \tau)| \leq \frac{M}{k \left| \sin \frac{a k \pi}{2} \right|} \quad (k = 1 \dots \infty). \quad (8)$$

Wenn  $a$  irrational ist, so ist jede Funktion  $G_k$  beschränkt, aber die Gesamtheit der Funktionen  $G_k$  ist nicht beschränkt. Wir sagen in diesem Falle, dass Quasiresonanz eintritt. Ist  $a$  eine ganze oder rationale Zahl, so wird der Nenner mancher Funktionen  $G_k$  zu Null. In diesem Falle

<sup>1</sup> Wir beweisen (siehe Hilfsatz I in Arbeit), dass die Einsetzung der Fourierreihe in Gleichung (1), (2), (3) erlaubt ist.



tritt reine Resonanz ein. Sei  $a = 2m + 1$  ( $m$  ganze Zahl)<sup>1</sup> und sei  $f(u)$  ein ungerades Polynom. Dann suchen wir die Gleichungen (1), (2), (3) durch eine Fourierreihe von der Form

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x, \quad (9)$$

welche nur ungerade Koeffizienten enthält, zu befriedigen. In diesem Falle nimmt das entsprechende System von unendlichen Integralgleichungen die Form

$$z_{2k+1}(t) = B_{2k+1}(t) + \mu \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) f_{2k+1}[z_1(\tau), z_3(\tau), \dots] d\tau \quad (10)$$

an. Sämtliche Greenschen Funktionen  $G_{2k+1}$  erfüllen die Ungleichungen

$$|G_{2k+1}(t, \tau)| \leq \frac{M}{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, \infty; M = \text{Const.}) \quad (11)$$

Wir haben bewiesen, dass in diesem Falle das System (10) bei genügend kleinem  $\mu$  (und anderen Bedingungen) eine im Intervalle  $0 \leq t \leq 1$  stetige (nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen) Lösung hat, die periodisch ist.

Für den Beweis des Existenzsatzes führen wir den Begriff des Funktionalraumes  $A_m$  ein.

**Definition.** Die Funktion  $\Phi(x)$ , welche der Summe der Fourierreihe

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k^m} \sin k\pi x \quad (12)$$

gleich ist (wo  $m$  eine ganze Zahl  $\geq 0$ ), ist ein Punkt des Funktionalraumes  $A_m$ , wenn die Reihe (12')

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 = c^2 < +\infty \quad (12')$$

konvergiert.

Es sei  $\Phi_1(x) \in A_3$  und  $\Phi_2(x) \in A_3$  und seien

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k^3} \sin k\pi x, & \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 &= c^2 \\ \Phi_2(x) &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y'_k}{k^3} \sin k\pi x, & \sum_{k=1}^{\infty} y'^2_k &= c_1^2. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Der Existenzsatz bleibt auch für  $a = \frac{2m+1}{q}$  gültig, worin  $q > 0$  eine ganze Zahl ist.

Dann werden wir die Grösse

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y'_k)^2},$$

Abstand der Punkte  $\Phi_1(x)$  und  $\Phi_2(x)$  des Raumes  $A_3$  nennen und werden sie mit dem Symbol

$$\omega[\Phi_1(x), \Phi_2(x)]$$

bezeichnen. Für beliebige Punkte, die dem Raum  $A_3$  angehören, werden die drei Grundaxiome des metrischen Raumes erfüllt, z. B. das Dreieck-axiom

$$\omega[\Phi_1(x), \Phi_3(x)] \leq \omega[\Phi_1(x), \Phi_2(x)] + \omega[\Phi_2(x), \Phi_3(x)].$$

Ist  $f(u)$  ein Polynom, so besteht bei  $|u_1| \leq b$  und  $|u_2| \leq b$ , wo  $b$  beliebig aber fest ist, die Ungleichung

$$[f(u_1) - f(u_2)]^2 \leq \alpha^2 (u_1 - u_2)^2$$

wo  $\alpha$  eine Konstante ist. Setzen wir

$$u_1(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin k\pi x$$

$$u_2(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k \sin k\pi x$$

und nehmen an, dass die Funktionen  $u_1$  und  $u_2 \in A_3$  und dass für jedes  $x$

$$|u_1(x)| \leq b, \quad |u_2(x)| \leq b.$$

Dann gilt die Lipschitz'sche Bedingung

$$r[f(u_1(x)), f(u_2(x))] \leq \alpha r[u_1(x), u_2(x)],$$

wo  $r$  das Symbol für den Abstand im Hilbert'schen Raum ist. Unter Benutzung des Begriffes des Raumes  $A_m$  und der Lipschitz'schen Bedingung lässt sich, mittels der Methode der sukzessiven Annäherungen, leicht der folgende Existenzsatz beweisen:

I Existenzsatz. Das System von Integralgleichungen (10) hat unter der Bedingung, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^4 \Phi_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leq c^2 < \frac{(1 - \mu \lambda M)^2}{M^2} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\mu < \min\left(\frac{1}{\lambda M}, \frac{1}{\alpha M \gamma_2}\right), \quad M = \frac{1}{2\pi(2m+1)}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)^2}}$$

$$\lambda = 4\beta\gamma_2, \quad \beta = \max(\beta_1, \beta_2) \quad \gamma_6 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = \max |f'(u)| \\ \beta_2 = \max |f''(u)| \end{array} \right\} \text{ bei } |u| \leq \sqrt{2}\gamma_6$$

eine Lösung  $z_{2k+1}(t) = \varphi_{2k+1}(t)$ , die dem Raum  $A_3$  angehört, wobei alle Funktionen  $\varphi_{2k+1}(t)$  ( $k=0, 1, \dots$ ) stetig im Intervalle  $0 \leq t \leq 1$  und periodisch mit der Periode 1 sind, falls die Funktionen  $\Phi_{2k+1}(t)$  dieselbe Eigenschaft haben.

Aus diesem Existenzsatz erhält man den folgenden Existenzsatz für die partielle Differentialgleichung (1) mit den Randbedingungen (2), (3):

II Existenzsatz. Ist  $a = 2m + 1$  ( $m$  ganze Zahl)

$$f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \dots + a_{2n+1} u^{2n+1},$$

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq \alpha |u_1 - u_2| \quad \text{bei} \quad |u| \leq \sqrt{2} \gamma_6$$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{2k+1}(t)}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}^2(t) = C^2(t) \leq c^2$$

(wo die Konstante  $c$  genügend klein ist), wobei die Funktion  $\Phi(x, t)$  stetig in  $t$  ist bei  $0 \leq t \leq 1$  und  $\Phi(x, t) = \Phi(x, t+1)$ , so hat die Gleichung (1) mit den Bedingungen (2), (3), bei genügend kleinem  $\mu$ , die Lösung  $u(x, t)$ , welche periodisch in  $t$  mit der Periode 1 und nebst ihren Ableitungen zweiter Ordnung  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  stetig im Gebiete  $\Omega$  ist.

Ferner beweisen wir, dass die Lösung von der Form (9) bei Erfüllung der Bedingungen des Existenzsatzes einzig ist. Im Falle der Quasi-Resonanz kann man den Existenzsatz mit dieser Methode nicht beweisen. Die Frage, ob in diesem Fall eine periodische Lösung existiert, bleibt vorläufig offen. Wir beweisen, dass unter gewissen Bedingungen die Aufgabe (1), (2), (3) bei  $\mu = 0$  keine Lösung besitzt, die in eine konvergente Fourierreihe zerlegbar ist. Wir formulieren hier den Nichtexistenzsatz:

Nichtexistenzsatz. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t),$$

wo

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{kj} \sin k\pi x e^{j2\pi i t}$$

eine absolut und in  $\bar{\Omega}$  gleichmässig konvergente Fourierreihe ist, wobei  $|c_{kj}| \neq 0$  ( $k=1, \dots, \infty$ ;  $j=0, \pm 1, \dots, \pm \infty$ ) hat bei gewissen irrationalen Werten von  $a^2$  keine Lösungen  $u(x, t)$ , die den Randbedingungen (2), (3) genügen und welche nebst ihren Ableitungen  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  im Gebiete  $\bar{\Omega}$  stetig sind.

Endlich beweisen wir, dass die nichtlineare Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu u^2,$$

<sup>1</sup> Die Menge dieser Werte  $a$  hat übrigens die Mächtigkeit des Kontinuums.

wo

$$\Phi(x, t) = \sin \pi x \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + a^2 \pi^2 \theta \right), \quad \theta^2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{k2\pi i t}, \quad q_k \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

$\theta(t)$  nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung bei  $0 \leq t \leq 1$  stetig ist), welche bei  $\mu = 0$  eine periodische Lösung besitzt

$$u_0(x, t) = \theta(t) \sin \pi x$$

bei  $\mu \neq 0$  keine Lösung hat, die in eine konvergente Reihe nach Potenzen von  $\mu$  zerlegbar ist.

Bemerkung. Wenn man jede  $k$ -te Gleichung des Systems (10) mit  $\sqrt{2} \sin(2k+1)\pi x$  multipliziert und dann nach  $k$  addiert, so erhält man

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x \equiv u(x, t) = \\ & = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 G_{2k+1}(t, \tau) \sin(2k+1)\pi x [\Phi_{2k+1}(\tau) + \mu f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots)] d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Ersetzt man in Formel (13) die Fourierkoeffizienten  $\Phi_{2k+1}$  und  $f_{2k+1}$  durch ihre Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Phi_{2k+1}(\tau) &= \sqrt{2} \int_0^1 \Phi(\xi, \tau) \sin(2k+1)\pi \xi d\xi \\ f_{2k+1}(z_1, z_3, \dots) &= \sqrt{2} \int_0^1 f(u(\xi, \tau)) \sin(2k+1)\pi \xi d\xi \end{aligned}$$

und vertauscht die Zeichen der Summe und des Integrals, so erhält man die Integralgleichung für  $u(x, t)$

$$u(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, \xi; t, \tau) [\Phi(\xi, \tau) + \mu f(u(\xi, \tau))] d\xi d\tau, \quad (14)$$

wo

$$\begin{aligned} (2m+1)(-1)^m K(x, \xi; t, \tau) &= \frac{1}{16} \sum_{j=1}^2 y(\omega_j) - \frac{1}{16} \sum_{j=3}^4 y(\omega_j) \\ & \left. \begin{aligned} \omega_1 &= \pi(x - \xi - T), \quad \omega_2 = \pi(x - \xi + T) \\ \omega_3 &= \pi(x + \xi + T), \quad \omega_4 = \pi(x + \xi - T) \\ T &= (2m+1) \left( |t - \tau| - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \\ y(\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{» } \omega = k\pi - \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{» } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} < \omega < (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Dieser Gleichung (14) genügt jede Lösung, die dem Existenzsatz I entspricht.

**А. М. ЖУРАВСКИЙ****О ПРИБЛИЖЕННЫХ КРАТНЫХ КВАДРАТУРАХ<sup>1</sup>**

В статье даются различные приближенные формулы для выполнения кратных квадратур. Рассматриваются случаи задания подинтегральной функции как в конечном, так и в бесконечном числе точек области интегрирования. Особое внимание уделяется случаю точек, расположенных на серии прямых или плоскостей в области интегрирования. Приводятся оценки приближенных формул.

В то время как вопрос о приближенном вычислении простого интеграла исследован исчерпывающим образом и в настоящее время мы имеем разнообразные способы для его решения, задача о приближенном вычислении кратного интеграла оставалась в тени. Тому, думается, две причины.

Первая состоит в том, что с чисто математической точки зрения задача представлялась мало интересной. Поскольку кратное интегрирование сводится к последовательному вычислению квадратур, для которых задача приближенного вычисления решена, вопрос о приближенном вычислении кратных квадратур может считаться принципиально решенным.

Вторая, более веская причина заключается в том, что практические проблемы, так сильно влияющие на развитие прикладной математики, а иногда и дающие ей новое направление, не предъявляли своих требований к разработке приемов практического выполнения кратных квадратур по приближению.

Не так обстоит дело в настоящее время. Ряд вопросов, имеющих большое практическое значение, приводится к приближенному вычислению кратного, обычно двойного или тройного интеграла.

В настоящем сообщении мы постараемся показать, что рассмотрение интеграла от функции нескольких переменных вносит некоторые специфические черты, не позволяющие всегда сразу же свести весь вопрос к приближенному выполнению простых квадратур.

Выводя формулы для выполнения приближенной кратной квадратуры, мы будем предполагать, что такие области интегрирования, в которых

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.



задано значение подинтегральной функции, указаны наперед. Интересного вопроса о выборе этих точек в области интегрирования так, чтобы погрешность оказывалась минимальной, т. е. проблемы, аналогичной задаче механических квадратур, мы сейчас касаться не будем.

§ 1. Начнем с распространения простейших формул простых приближенных квадратур на кратные—прежде всего с аналога формулы трапеций. В формуле трапеций дается значение подинтегральной функции на границах интервала интегрирования и подинтегральная функция аппроксимируется функцией линейной.

Положим, что в  $n$ -мерном пространстве дано значение функции

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

в  $n+1$ -й точке пространства  $M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  ( $i = \overline{0, n}$ ). Эти точки являются вершинами многогранника в пространстве  $n$  измерений, если

$$\Delta = \|x_k^{(i)}\| \neq 0. \quad (2)$$

Обозначим область, занятую этим многогранником, через  $T$ . Формула

$$\int \dots \int_n \overbrace{f(x_1, \dots, x_n)}^U dx_1 \dots dx_n \approx |\Delta| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n+1}, \quad (3)$$

где  $U_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) обозначает значение, принимаемое функцией  $U$  в точке  $M_k$ , дает приближенное выражение интеграла. При построении этой формулы интерполирующая функция принималась линейной. Величина погрешности  $R$  формулы (3) характеризуется равенством:

$$R = -\frac{1}{2} \frac{|\Delta|}{(n+2)!} \sum_{i \leq k} d_{ik}^2 \left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\}_{t=0}, \quad (3')$$

где  $d_{ik}$  обозначает расстояние от точки  $M_i$  до точки  $M_k$ , а производная от функции  $U$  берется в некотором направлении в некоторой точке области  $T$ . Формула средних прямоугольников характерна тем, что при выводе ее подинтегральная функция принимается линейной, причем производная аппроксимирующей функции совпадает с производной подинтегральной функции в точке, где значение подинтегральной функции задано. Значение подинтегральной функции задается в центре интервала интегрирования.

Рассматривая функцию  $n$  переменных, зададим ее значение в центре тяжести области интегрирования  $T$ , не делая никаких дальнейших предположений относительно области  $T$ .

Получаем формулу, аналогичную формуле средних прямоугольников:

$$\int \dots \int_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \approx f(c_1, \dots, c_n) V, \quad (4)$$

где точка  $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$  есть центр тяжести области  $T$ , а  $V$  обозначает ее объем.

Погрешность  $R$  приближенного равенства (4) характеризуется формулой:

$$R = \frac{I}{2} \left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\}_{t=0}, \quad (5)$$

где  $I$  обозначает момент инерции области  $T$  относительно центра тяжести, а  $\left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\}_{t=0}$  производную от функции

$$U = f(x_1 + t \cos \alpha_1, \dots, x_n + t \cos \alpha_n), \quad (\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1),$$

вычисленную для некоторой точки в области интегрирования  $T$ .

Формула, аналогичная формуле Симпсона, получится путем задания значений подинтегральной функции в центре  $n$ -мерного параллелепипеда и в центрах его граней и ребер. Формула для приближенного вычисления интеграла представляется в следующем виде.

Обозначим значение подинтегральной функции в центре параллелепипеда через  $U_0$  и в вершинах через

$$U_{1,1}, \dots, 1, U_{-1,1}, \dots, 1, U_{1,-1}, \dots, 1, \dots, U_{-1,-1}, \dots, -1.$$

Значение функции в серединах ребер и граней будем обозначать

$$U_{1,0}, \dots, 1, U_{-1,0}, \dots, 1, U_{0,1}, \dots, 1, U_{0,-1}, \dots, 1, \dots$$

Величина интеграла представляется равенством:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_n U dx_1 \dots dx_n \approx \\ & \approx \frac{V}{6^n} \{ S_{1,1}, \dots, 1 + 4S_{0,1}, \dots, 1 + \dots + 4^n S_{0,0}, \dots, 0 \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $V$  обозначает объем параллелепипеда, а величины

$$S_{1,1}, \dots, 1, S_{0,1}, \dots, 1, \dots, S_{0,0}, \dots, 0$$

обозначают суммы, распространенные на значения  $U$ : первая на значение, не содержащее в указателях нулей, вторая на значение, содержащее среди указателей только один нуль, и т. д.

Погрешность  $R$  формулы (6) характеризуется равенством:

$$R = -\frac{V}{2880} (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) \left\{ \frac{d^4 U}{dt^4} \right\}_{t=0}, \quad (7)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  обозначают длины ребер параллелепипеда, а  $\left\{ \frac{d^4 U}{dt^4} \right\}_{t=0}$  — значение производной, взятой от подинтегральной функции в некотором направлении в некоторой точке области интегрирования  $T$ .

Наряду с отмеченными формулами можно указать серию формул, служащих для приближенного вычисления кратного интеграла.

Так, например, в случае, когда оказываются заданными только значения функции в вершинах прямоугольного параллелепипеда, имеем формулу

$$\int \dots \int_n U dx_1 \dots dx_n \approx \frac{V}{2^n} S_{1,1}, \dots, 1, \quad (8)$$

где  $S_{1,1}, \dots, 1$  имеет указанное выше значение,  $V$  обозначает объем области  $T$ .

Погрешность этой формулы характеризуется равенством:

$$R = -\frac{V}{12}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \left\{ \frac{d^2 U}{dt^2} \right\}_{t=0}, \quad (9)$$

где все величины имеют указанный выше смысл. Приведенные здесь формулы ни в какой мере не исчерпывают всех возможных формул, служащих для приближенного вычисления кратного интеграла, и являясь лишь примерами их. В случае, когда в заданной области интегрирования имеется серия точек, где значение подынтегральной функции известно, область интегрирования подразделяется на части, к каждой из которых применяется одна из указанных нами формул. Само собой понятно, что в зависимости от деления области на отдельные части получится то или иное числовое выражение величины интеграла.

§ 2. Кратное интегрирование сводится к последовательному выполнению приближенных простых квадратур. В том случае, когда значения подынтегральной функции задаются в точках правильной сети, рассмотрение вопроса приводится к непосредственному применению известных приемов. Однако в ряде случаев необходимы предварительные преобразования, на которых мы сейчас и остановимся. Для большей простоты письма ограничимся рассмотрением тройного интеграла.

Положим, что в области интегрирования  $T$  известна точка или определено приближительное значение подынтегральной функции для точек серий плоскостей, друг друга не пересекающих.

Представим себе область  $T$  как происшедшую от перемещения некоторой фигуры, которая в отдельных своих положениях совпадает с данными сечениями области  $T$ . Будем рассматривать подынтегральную функцию как плотность различных точек массы, занимающей область  $T$ .

Для каждого положения перемещающейся фигуры отметим координаты центра тяжести. Обозначим их через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Выберем на перемещающейся плоскости некоторые оси  $OU$ ,  $OV$ , имеющие начало в центре тяжести перемещающейся фигуры.

Введем обозначения:

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  — углы, образуемые осями  $OU$  и  $OV$  с системой неподвижных осей;

$s$  — длина дуги траектории центра тяжести фигуры;

$F(s)$  — поверхностная масса;

$\theta$  — угол между плоскостью сечения и нормальной плоскостью траектории центра тяжести.

Принимая во внимание соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x &= X + u \cos \alpha + v \cos \alpha', \\ y &= Y + u \cos \beta + v \cos \beta', \\ z &= Z + u \cos \gamma + v \cos \gamma', \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

можно привести интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

к виду:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^L F(s) \cos \theta ds, \quad (11)$$

где

$$F(s) = \int_S f(X + u \cos \alpha + v \cos \alpha', \dots) du dv \quad (12)$$

и интегрирование распространяется по площади сечения. Буквой  $L$  обозначена длина дуги траектории центра тяжести.

Преобразование (10) сводит таким образом приближенное вычисление тройного интеграла к последовательному выполнению двойного и простого интегрирования.

Отметим, что из равенства (11) вытекает любопытное обобщение теоремы Гюльдена. Если положить

$$f(x, y, z) = 1,$$

то тройной интеграл выражает объем  $V$  области  $T$ ;  $F(s)$  будет представлять собой площадь  $S$  переменного сечения, и равенство (10) обращается в

$$V = \int_0^L S \cos \theta ds. \quad (13)$$

В случае, когда  $S$  остается постоянной и  $\theta = 0$ , равенство (13) дает

$$V = S \cdot L. \quad (14)$$

Таким образом объем тела, образованного перемещением фигуры неизменной площади, перемещающейся таким образом, что плоскость фигуры остается нормальной к траектории центра тяжести, равняется произведению площади фигуры на длину траектории, описанной ее центром тяжести.

Возвращаясь к равенству (11), отметим еще, что аналогичное преобразование имеет место для интеграла любой кратности.

Так, например, в том случае, когда в двойном интеграле известны значения подинтегральной функции для ряда прямых в области интегрирования,

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_0^L F(s) \cos \theta ds, \quad (15)$$

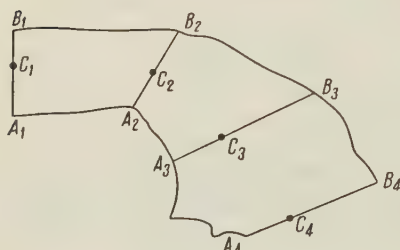
где

$$F(s) = \int_a^b f(x + u \cos \alpha, y + v \cos \beta) du \quad (16)$$

обозначает интегрирование, распространенное по прямой, а  $\theta$  — угол между данной прямой и нормалью к траектории центра тяжести.

Посмотрим, как будет располагаться вычисление. На фиг. 1 изображена серия прямых, для точек которых указаны значения подинтегральной функции.

Выполняем для каждой прямой приближенную квадратуру



Фиг. 1

$$\int_{a_i}^{b_i} U du = F(s).$$

Если принять точку  $A_i$  за начало, а длину прямой назвать  $l_i$ , то

$$F(s_i) = \int_0^{l_i} U dt, \quad (17)$$

где  $t$  обозначает длину, отсчитываемую от точки  $A_i$ . Значения функции известны для ряда отдельных точек

прямой или величина интеграла дается непосредственно. Приближенная квадратура выполняется по одной из известных формул.

Чтобы определить положение центра тяжести, выполняем приближенную квадратуру

$$\Phi(s_i) = \int_0^{l_i} U t dt \quad (18)$$

по одной из известных формул.

Для выполнения приближенного вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства (15), представим его в виде:

$$\int_0^L F(s) \cos \theta ds = \int_0^\alpha F \cdot R d\varphi, \quad (19)$$

где  $\varphi$  — угол, образуемый перемещающейся прямой с ее начальным положением, а  $R$  — расстояние от центра тяжести  $C$  до точки пересечения прямой со смежным ее положением.

Применяя простейшую формулу приближенных квадратур, получаем:

$$\int_0^\alpha F \cdot R d\varphi \approx \frac{1}{2} \{ F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + \dots + F_n \sigma_n \}, \quad (20)$$

где  $\sigma_i$  обозначает длину дуги окружности радиуса  $R_i$ , имеющей центр на  $i$ -ом сечении в середине отрезка, концами которого служат точки пересечения  $i$ -ой прямой со смежными, и заключенной между прямыми, смежными с данной.

Правило построения дуги  $\sigma_i$  поясняется фиг. 2. Само собой разумеется, что определение длин дуг может быть выполнено как графически, так и аналитически.



В случае, когда углы, образуемые прямыми, не велики, точки  $G$  и  $H$  могут оказаться за пределом чертежа. В этом случае дугу окружности следует принять за прямую линию, проведенную через точку  $C_i$ , перпендикулярно  $A_i B_i$ .

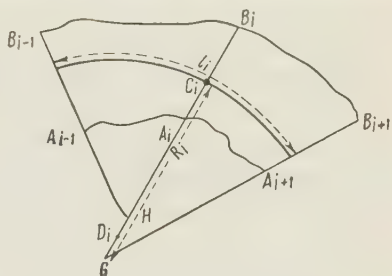
§ 3. Рассмотрим вкратце другое преобразование интеграла, имеющее целью дать базу для вывода формул приближенного вычисления тройного интеграла в том случае, когда известны значения подинтегральной функции в ряде точек, расположенных по серии прямых, заданных в области интегрирования  $T$ .

Будем, как и раньше, приписывать точкам области  $T$  плотность, равную

$$U = f(x, y, z).$$

Пусть через каждую точку области  $T$  проходит одна и только одна прямая конгруенции. Отметим на каждой прямой положение центра тяжести  $C(X, Y, Z)$ . Точки  $C$  заполняют некоторую поверхность  $S$ . Обозначим через  $u, v$  ортогональные координаты точки на поверхности  $S$  и через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, образуемые прямой конгруенции с осями координат. Величины  $X, Y, Z; \alpha, \beta, \gamma$  суть некоторые функции от  $u, v$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} x &= X + t \cos \alpha, & y &= Y + t \cos \beta, \\ z &= Z + t \cos \gamma. \end{aligned} \quad (21)$$



Фиг. 2

Обозначим через  $\theta$  угол, образуемый нормалью к поверхности  $S$  с прямой конгруенции, проходящей через точку поверхности, где взята нормаль, и через  $I$ —момент инерции отрезка прямой, заключенного в области  $T$ , относительно его центра тяжести.

Рассмотрим шар с центром в начале координат и радиусом равным единице. Проведем через начало координат прямые, параллельные прямым конгруенции, и отметим точки пересечения этих прямых с шаровой поверхностью. Точки пересечения будем называть сферическим изображением соответствующих прямых конгруенции.

Вычисление тройного интеграла

$$\iiint_T U \, dx \, dy \, dz$$

может быть произведено согласно равенству:

$$\iiint_T U \, dx \, dy \, dz = \int_S F \cos \theta \, dS + \int_G I \, d\sigma, \quad (22)$$

где

$$F = \int_a^b U \, dt, \quad (23)$$

$$I = \int_a^b U t^2 dt. \quad (24)$$

Интегрирование производится вдоль прямой конгруенции, причем за начало координат принят соответствующий центр тяжести отрезка. Пределы интегрирования суть функции от  $u$  и  $v$ . Буква  $\sigma$  обозначает площадь сферического изображения.

Равенство (22) сводит вычисление тройного интеграла к вычислению простого интеграла с последующим вычислением двойного. В тех случаях, когда заданы значения функции, стоящей под знаком тройного интеграла, для ряда точек, находящихся на прямых, указанным образом расположенных в области интегрирования, величины интегралов (23) и (24) легко устанавливаются по формулам приближенных простых квадратур. Из равенства (22) можно вывести правила для приближенного вычисления тройного интеграла подобно тому, как это было сделано на базе равенства (10).

Отметим интересное обстоятельство. В случае

$$U = f(x, y, z) = 1$$

тройной интеграл выражает объем. Практические приемы определения объема, применяемые при подсчете запасов угольных месторождений, например углей Донбасса, равносильны формуле (22) без учета второго члена.

§ 4. Формулы для выполнения приближенных кратных квадратур, указанные в § 1, дают простейшие решения задачи. При построении функции, аппроксимирующей подынтегральную, принималось лишь небольшое количество значений подынтегральной функции. Можно построить серию формул для выполнения приближенных квадратур, принимая во внимание всю совокупность точек в области интегрирования. Для простоты письма сграничимся рассмотрением функции двух переменных. Пусть будет известно значение функции  $U$  в ряде точек  $M_1(x_1, y_1), \dots, M_s(x_s, y_s)$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обозначают серию различных значений, принимаемых абсциссами точек. Положим, что точки с абсциссой  $x_i$  имеют ординаты  $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n_i}^{(i)}$ .

Построим полином

$$\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

и полиномы

$$\varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_i) \varphi'(x_i)} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Одновременно с этим построим полиномы

$$\psi_i(y) = (y - y_1^{(i)}) \dots (y - y_{n_i}^{(i)})$$

и полиномы

$$\psi_{ih}(y) = \frac{\psi_i(y)}{(y - y_h^{(i)}) \psi_i'(y_h^{(i)})}.$$

Многочлен

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \sum_{k=1}^{n_i} f(x_i, y_k^{(i)}) \phi_{ik}(y) \quad (25)$$

принимает в данных точках наперед указанные значения. Можно однако получить аппроксимирующий многочлен и иначе, определив его коэффициенты так, чтобы в данных точках получились наперед указанные значения.

Во всех случаях интегрирующий полином представляется в виде:

$$P(x, y) = U_1 P_1(x, y) + U_2 P_2(x, y) + \dots + U_n P_n(x, y). \quad (26)$$

Формула для выполнения приближенной квадратуры примет вид:

$$\iint_T U dx dy \approx A_1 U_1 + \dots + A_n U_n, \quad (27)$$

где

$$A_i = \iint_T P_i(x, y) dx dy \quad (i = \overline{1, n}).$$

В случае, когда значения подинтегральной функции заданы в точках правильной сети и область интегрирования имеет прямоугольную форму, коэффициенты  $A_i$  выражаются через коэффициенты формулы Котеса, если принять аппроксимирующий многочлен по формуле (25). Условимся обозначать коэффициенты формулы Котеса через  $C_{1n}, C_{2n}, \dots, C_{nn}$ .

В таком случае равенство (27) примет вид:

$$\iint_T U dx dy \approx \sum C_{im} C_{kn} U_{ik} S.$$

Здесь

$$U_{ik} = f(x_i, y_k) \quad (i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n});$$

$S$  обозначает площадь основного параллелограмма сети, а точка  $M_{ik}(x_i, y_k)$  является одной из точек сети.

§ 5. Вычисление двойного интеграла может быть проведено и графо-аналитическим приемом. Если представить себе функцию двух переменных в виде поверхности, то на плоскости она может быть представлена в виде серии горизонталей. Когда дается ряд отдельных точек этой поверхности, по этой серии может быть произведено построение горизонталей. Обычно это достигается посредством предварительного построения серий точек, имеющих определенную числовую отметку.

Такой способ не отличается большой точностью и вносит известный произвол. Но такой же произвол мы имеем и при чисто аналитическом решении задачи. Он сказывается в выборе вида интерполирующей функции.

После того как изображение функции построено, вычисление двойного интеграла не представляет никакого труда.

Измеряем площади, ограниченные отдельными горизонталями. Пусть эти площади будут равны соответственно  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , а разность отметок горизонталей равна  $h$ . Отметка нижней горизонтали  $H$ .

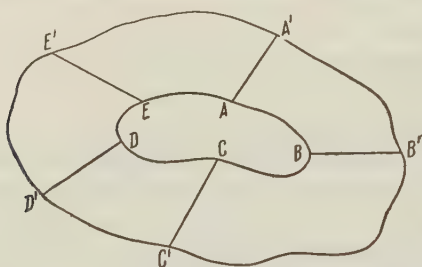
Двойной интеграл находится по приближенной формуле:

$$\iint U dx dy \approx H \cdot s_0 + h \left( \frac{1}{2} s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n \right). \quad (28)$$

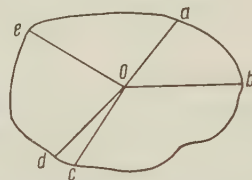
Вместо этой может быть взята и иная формула для выполнения приближенной простой квадратуры. Интересно отметить, что приближенное вычисление объема по площади двух смежных горизонталей с помощью формулы

$$V \approx \frac{1}{2} (s_0 + s_1) h \quad (29)$$

может быть уточнено. Это уточнение достигается за счет использования данных о взаимном положении горизонталей и о виде боковой поверх-



Фиг. 3



Фиг. 4

ности. Если предположить, что боковая поверхность линейчатая, то дополнительный член формулы (29) имеет вид:

$$- \frac{1}{6} h \cdot s_2,$$

где  $s_2$ —площадь, ограниченная некоторым контуром, построение которого может быть произведено следующим образом.

Пусть фиг. 3 дает изображение двух рассматриваемых горизонталей. Отрезки  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  и  $EE'$  представляют собой проекции образующей на плоскость горизонталей. Из некоторой точки  $O$  (фиг. 4) проводим серию прямых  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ,  $Od$ ,  $Oc$ , параллельных линиям  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ . Концы этих прямых располагаются на кривой, ограничивающей площадь  $s_2$ .

Введение указанного поправочного члена не имеет значения в тех случаях, когда горизонталы мало разнятся одна от другой, т. е. когда серия горизонталей проводится достаточно часто. Учет дополнительного члена позволяет увеличить расстояние между горизонталями и тем уменьшить объем необходимых графических работ.

Поправочный член формулы (29) был указан В. И. Бауманом. В случае, когда боковая поверхность не линейная, в равенстве

$$V \approx \left( \frac{1}{2} s_0 + \frac{1}{2} s_1 - \frac{1}{6} s_2 \right) h \quad (30)$$

коэффициенты получают другие значения, которые каждый раз можно устанавливать, зная закон образования боковой поверхности.

В заключение скажем несколько слов относительно применения графоаналитического приема в условиях резко изменяющейся подинтегральной функции. В этом случае построение горизонталей, хотя бы в какой-либо мере отвечающих действительности, представляется мало надежным. Равным образом интерполяционные формулы, сглаживающие в известной мере резкость изменений аппроксимируемой функции, связаны в этом случае со значительными погрешностями.

Для получения результатов, заслуживающих доверия, в этом случае можно поступать следующим образом. Вместо функции  $U$  будем рассматривать функцию

$$F(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h f(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta. \quad (31)$$

Возьмем интеграл

$$\iint_T F(x, y) dx dy = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^h \int_{-h}^h \iint_{T_{\xi, \eta}} f(x, y) dx dy d\xi d\eta. \quad (32)$$

Область  $T_{\xi, \eta}$  получится смещением области  $T$  в направлении вектора с составляющими  $\xi, \eta$ .

Представляя данный интеграл в виде

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_T F(x, y) dx dy + R, \quad (33)$$

нетрудно установить, что

$$|R| < M \cdot L \cdot h, \quad (34)$$

где  $M$  обозначает максимальную величину  $f(x, y)$  в полосе шириной  $2h$ , прилегающей с той и с другой стороны к контуру области  $T$ ;  $L$ —длина этого контура. Разность  $R$  будет небольшой при небольшом  $h$ . Относительная погрешность будет мала во всех случаях, когда  $h$  невелико по сравнению с размерами области.

Практическое использование функции  $F(x, y)$  сводится к усреднению ее значений, находящихся внутри квадрата со стороной  $2h$ . Это дает возможность получить функцию с плавными изменениями, к которой уже можно приложить обычные приемы аппроксимации. Выбор величины  $h$  зависит от характера функции  $f(x, y)$  и резкости ее изменения.

Приложение этого приема на практике дало возможность произвести действительные вычисления в ряде случаев, представлявших значительные затруднения.



# A. JOURAVSKY. SUR LES QUADRATURES APPROCHÉES MULTIPLES

## RÉSUMÉ

Jusqu'à présent le problème du calcul approché des intégrales multiples n'a pas attiré beaucoup d'attention. Il nous semble qu'il y a deux raisons qui expliquent ce fait. La première est la suivante: dans les cas usuels les quadratures multiples approchées se réduisent facilement aux quadratures simples approchées et le problème du calcul approché ne donne pas lieu aux recherches nouvelles.

La seconde est plus profonde. Les applications pratiques n'avaient besoin du calcul approché des intégrales multiples que dans les cas les plus simples et leur influence sur les recherches abstraites ne s'étendait pas aux cas plus compliqués. A l'heure actuelle la question se pose autrement.

Beaucoup de problèmes pratiques importants se réduisent aux quadratures multiples approchées en exigeant des recherches nouvelles. Le but de l'article présent est de montrer que le champ des recherches sur les quadratures multiples approchées est loin d'être épuisé est que l'on peut trouver sur cette voie beaucoup de nouveaux problèmes.

Le § 1 est consacré à l'extension des formules connues des quadratures simples approchées au cas des quadratures multiples approchées.

Le § 2 donne la solution du problème suivant: Trouver la valeur approchée de l'intégrale triple connaissant les valeurs de la fonction à intégrer sur un système de sections planes du domaine en question. Comme une conséquence des résultats du § 2 nous obtenons une généralisation du théorème de Pappus-Guldin.

Si une figure de l'aire constante se déforme et se déplace dans l'espace de telle manière que le plan de la figure reste normal à la trajectoire de son centre de gravité, le volume engendré est égal au produit de l'aire de cette figure et de la longueur de la trajectoire de son centre de gravité.

Le problème suivant analogue à celui du § 2 est étudié dans le § 3.

Trouver la valeur approchée de l'intégrale, les valeurs de la fonction intégrée, étant données pour une suite de droites dont la position dans le domaine d'intégration est connue. Le problème général du calcul approché de l'intégrale multiple, quand les valeurs de la fonction à intégrer sont données en un nombre fini de points du domaine d'intégration, est résolu dans le § 4. La formule

$$V = \int_0^h s \, dx \approx \frac{1}{2} (s_1 + s_2) \cdot h$$

donne la valeur approchée du volume  $V$  quand on connaît les valeurs des aires  $s_1$  et  $s_2$  de deux sections planes à distance  $h$ . Si l'on connaît non seulement les valeurs des aires  $s_1$  et  $s_2$ , mais aussi leur forme et leur position, la formule peut être précisée.

Une règle pour la construction du terme complémentaire est établie au § 5. Le § 6 traite la question du calcul approché de l'intégrale multiple dans le cas où la variation de la fonction à intégrer est très rapide.

Д. Ю. ПАНОВ

# РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ДЛИННЫХ И УЗКИХ ОБЛАСТЕЙ<sup>1</sup>

Работа посвящена одному из эффективных и практически удобных методов приближенного решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. Подробно рассматривается решение уравнения Лапласа и Пуассона при заданных граничных значениях. Метод применяется к конкретной задаче о кручении стержня с сечением, близким к симметричному винтовому и крыловым авиационным профилям.

I. При исследовании многих проблем прикладного характера применяются методы, с помощью которых приближенное решение двух- или трехмерной задачи сводится к точному или приближенному решению задачи одномерной.

Таков, например, метод решения задачи кручения для узкой и длинной области при помощи аналогии Прандтля (см. например [1], стр. 160 и сл.). Приближенное решение задачи кручения этим методом основано на допущении, что мембрана, натянутая на контур длинной и узкой области и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, провисает в каждом поперечном сечении, нормальном к средней линии области, приблизительно так же, как мембрана, натянутая на бесконечно-длинную полосу той же ширины, что и рассматриваемое сечение. Такого рода соображения приводят к формуле Гриффита [2] для геометрической жесткости кручения  $T$  тонкого симметричного относительно оси  $X$  профиля, простирающегося от  $x=a$  до  $x=b$  и имеющего толщину  $t(x)$  в сечении, определяемом абсциссой  $x$ ,

$$T \approx \frac{1}{3} \int_a^b [t(x)]^3 dx,$$

и к более общей формуле Прескотта (см. [3], стр. 170)

$$T \approx \frac{1}{3} \int_0^l [t(s)]^3 ds,$$

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

справедливой для любого тонкого профиля, причем  $s$ —дуга его средней линии, отсчитываемая от одного из концов профиля, а  $t(s)$ —толщина в функции  $s$ , измеренная по нормали к средней линии.

Математическая сторона указанного выше метода в конечном счете такова. Как известно, задача о кручении для области  $G$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , сводится к отысканию функции напряжений  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей внутри  $G$  уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

и равной нулю на контуре  $\Gamma$ . Когда функция  $\varphi(x, y)$  найдена, решаются все вопросы, которые ставятся в задаче кручения, и в частности определяется геометрическая жесткость кручения  $T$  по формуле:

$$T = 2 \iint_G \varphi(x, y) dx dy.$$

Вместо того чтобы точно решать уравнение (1) для узкой и длинной области  $G$ , которую мы будем предполагать для простоты симметричной относительно оси  $X$ , мы считаем, что получим приближенное решение, если в каждом сечении области  $x = \text{const}$  удовлетворим одномерному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\Phi = 0$$

при  $y = \pm \frac{1}{2} t(x)$ .

Решение уравнения (2) при указанных граничных условиях дает

$$\varphi(x, y) \approx \frac{t^2(x)}{4} - y^2 \quad (3)$$

и вычисляя

$$T = 2 \iint_G \varphi(x, y) dx dy = 2 \int_a^b \int_{-\frac{t(x)}{2}}^{+\frac{t(x)}{2}} \left[ \frac{t^2(x)}{4} - y^2 \right] dy dx,$$

мы получим формулу Гриффита.

Ясно, что приведенное выше рассуждение дает совершенно точные результаты лишь для таких двумерных задач, которые по существу являются одномерными (бесконечная полоса постоянной ширины), в остальных же случаях оно дает приближенные решения более или менее точные в зависимости от того, насколько длинна и узка рассматриваемая область. Никакого критерия, который позволял бы установить, можно ли применять такой метод к данной конкретной области, если не желают получить ошибку большую заранее указанной величины, в изложенном решении мы не имеем. Границы, в которых можно применять метод такого рода, остаются неизвестными, хотя возможность установить их была бы весьма ценной при решении многих практических задач.

II. Для того чтобы подойти к решению этого вопроса, естественно наметить следующий путь.

Рассмотрим область  $G_1$ , ограниченную двумя кривыми, которые мы будем предполагать для простоты пересекающимися на оси  $X$  (фиг. 1); рассмотрим, далее, область  $G_\lambda$ , отличающуюся от  $G_1$  только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении  $1:\lambda$ , где  $0 < \lambda < 1$ . Будем искать решение для области  $G_\lambda$  в виде ряда по степеням  $\lambda$ , построенного таким образом, что первый член ряда, не содержащий  $\lambda$ , дает решение задачи, получающееся при указанной выше замене двумерной проблемы одномерной, а последующие члены, содержащие  $\lambda$  во все более высоких степенях, представляют собой поправки, которые следует учитывать, если мы рассматриваем такие значения  $\lambda$ , при которых точность, даваемая первым членом, уже недостаточна.

Такой метод решения представляет, разумеется, наибольший интерес для задач, связанных с длинными и тонкими областями, т. е. для тех случаев, когда мы будем иметь дело с малыми значениями  $\lambda$  и сможем ограничиться малым числом членов разложения.

Повидимому, Дэнкан был первым исследователем, систематически использовавшим в своих работах по кручению и изгибу [4] намеченный выше метод разложений по степени «параметра толщины» (у Дэнкана «thickness parameter»); к сожалению, исследования Дэнкана в этом направлении весьма далеки от требований математической строгости, и потому нам кажется необходимым каким-либо образом обосновать этот метод, чрезвычайно удобный при решении многих задач. Исходя из несколько других, чем у Дэнкана, соображений, мы строим разложения по степеням  $\lambda$ , которые могут быть использованы в значительно более широком классе случаев, и даем простые оценки точности, достигаемой при пользовании этими разложениями. Краткое изложение этого исследования дано в нашей статье [5].

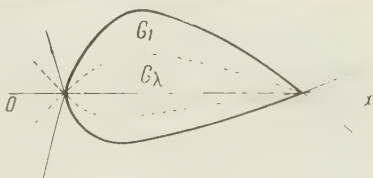
III. Для того чтобы сделать изложение более определенным, мы разовьем указанный выше метод лишь для случая уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4)$$

хотя применение этого метода возможно и во многих других случаях. Мы будем решать уравнение (4) для конечной односвязной области  $G_\lambda$ , ограниченной двумя дугами кривых

$$\left. \begin{aligned} y &= \lambda \phi_1(x), \\ y &= \lambda \phi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и принадлежащей к типу, изображенному на фиг. 1.



Фиг. 1

Функции  $\phi_1(x)$  и  $\phi_2(x)$  мы будем считать имеющими необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений  $x$ . В качестве граничных условий мы зададим значения функции  $\varphi(x, y)$  на дугах  $\phi_1$  и  $\phi_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi[x, \lambda\phi_1(x)] &= \varphi_1(x), \\ \varphi[x, \lambda\phi_2(x)] &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  регулярны на  $\phi_1$  и  $\phi_2$ ; будем, кроме того, предполагать, что функция

$$\Omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\phi_1(x) - \phi_2(x)} \quad (7)$$

регулярна для значений  $x$ , соответствующих точкам области  $G_1$  и ее границы. Наконец, мы предположим, что правая часть уравнения (4) представляет собой функцию, разлагающуюся в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по степеням  $y$

$$f(x, y) = f_0(x) + yf_1(x) + y^2f_2(x) + \dots \quad (8)$$

внутри и на границе области  $G_1$ . Положим

$$y = \lambda\eta, \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, \eta; \lambda). \quad (9)$$

Преобразуя уравнение (4), получим:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \lambda^2 f_0(x) + \lambda^3 \eta f_1(x) + \lambda^4 \eta^2 f_2(x) + \dots; \quad (10)$$

граничные же условия (6) можно будет записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi[x, \phi_1(x); \lambda] &= \varphi_1(x), \\ \Phi[x, \phi_2(x); \lambda] &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

так как кривые (5), очевидно, перейдут после преобразования (9) в

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \phi_1(x), \\ \eta &= \phi_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Итак, будем решать уравнение (10) с граничными условиями (11) на кривых (12). Будем искать это решение в виде ряда по степеням  $\lambda$ :

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = P_0(x, \eta) + \lambda P_1(x, \eta) + \lambda^2 P_2(x, \eta) + \dots \quad (13)$$

Функцию  $P_0(x, \eta)$  мы подберем так, чтобы для нее удовлетворялись граничные условия, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_0[x, \phi_1(x)] &= \varphi_1(x), \\ P_0[x, \phi_2(x)] &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

для остальных же коэффициентов  $P_n(x, \eta)$  потребуем:

$$\left. \begin{aligned} P_n[x, \phi_1(x)] &= 0, \\ P_n[x, \phi_2(x)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

При выполнении условий (14) и (15) функция  $\Phi(x, \eta; \lambda)$  будет, очевидно, удовлетворять условиям (11). Подставим ряд (13) в уравнение



(10) и произведем сравнение коэффициентов при одинаковых степенях  $\lambda$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_1}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{k+2}}{\partial \eta^2} &= f_k(x) \eta^k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Используя условия (14) и (15), мы можем определить из этих уравнений одну за другой все функции  $P_k(x, \eta)$ . В частности, будем иметь:

$$P_0(x, \eta) = \Omega_1(x) \eta + \Omega_2(x), \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(x) &= \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\phi_1(x) - \phi_2(x)}, \\ \Omega_2(x) &= \frac{\phi_1(x) \varphi_2(x) - \phi_2(x) \varphi_1(x)}{\phi_1(x) - \phi_2(x)}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

причем обе функции  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  регулярны для рассматриваемых значений  $x$ . Для  $\Omega_1(x)$  это является одним из основных требований (см. [7]), а  $\Omega_2(x)$  может не быть регулярной лишь при тех  $x$ , при которых

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = \phi,$$

но при этих значениях  $x$

$$\Omega_2(x) = \phi \Omega_1(x)$$

и, следовательно, также регулярна. Заметим, что функция  $P_0(x, \eta)$  получается просто путем линейной интерполяции по  $\eta$  граничных значений внутри области для каждого значения  $x$ .

Дальнейшие функции  $P_k(x, \eta)$  будут иметь такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} P_1(x, \eta) &= 0; \\ P_2(x, \eta) &= \frac{1}{2} (f_0 - D_x^2 \Omega_2) [\eta^2 - \eta (\phi_1 + \phi_2) + \phi_1 \phi_2] + \\ &\quad + \frac{1}{3!} (D_x^2 \Omega_1) [\eta^3 - \eta (\phi_1^2 + \phi_1 \phi_2 + \phi_2^2) + (\phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 \phi_2^2)], \\ P_3(x, \eta) &= \frac{1}{3!} f_1 [\eta^3 - \eta (\phi_1^3 - \phi_1 \phi_2 + \phi_2^3) + (\phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 \phi_2^2)]. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Нахождение этих выражений не составляет никакого труда, однако требует при решении в общем виде обширных вычислений; удобнее проделывать эти вычисления в необходимых случаях над конкретно заданными функциями.

В некоторых частных случаях, имеющих, впрочем, большой интерес, общие выражения (17) сильно упрощаются. Мы отметим здесь некоторые из этих случаев.

1. Уравнение Лапласа. В этом случае

$$f(x, y) = 0,$$

и значит

$$f_0(x) = f_1'(x) = \dots = 0.$$

Уравнения (16) дают

$$P_1(x_1, \eta) = P_3(x, \eta) = \dots = 0.$$

Таким образом в разложении (13) выпадают все члены с нечетными степенями  $\lambda$ . Аналогичное обстоятельство имеет место при рассмотрении уравнения Пуассона с правой частью, не зависящей от  $y$ , когда

$$f_0(x) \neq 0, \quad f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0.$$

К уравнениям именно такого типа сводятся задачи о кручении призматических стержней.

2. Случай симметричной области. Если область  $G_4$  симметрична относительно оси  $x$ , то

$$\phi_1(x) = -\phi_2(x) = \phi_3(x)$$

и формулы (17) значительно упрощаются. Для  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  мы в этом случае получаем выражения:

$$\Omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2\phi(x)},$$

$$\Omega_2(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2},$$

коэффициенты же  $P_k(x, \eta)$  будут таковы:

$$P_0(x, \eta) = \Omega_1\eta + \Omega_2,$$

$$P_1(x, \eta) = 0,$$

$$P_2(x, \eta) = \frac{1}{2}(f_0 - D_x^2\Omega_2)[\eta^2 - \phi^2] + \frac{1}{3!}(D_x^2\Omega_1)[\eta^3 - \eta\phi^2],$$

$$P_3(x, \eta) = \frac{1}{3!}f_1[\eta^3 - \eta\phi^2],$$

$$\dots\dots\dots$$

Отметим, между прочим, что выражения, полученные для коэффициентов, позволяют заменить в этом случае требование о регулярности функции  $\phi(x)$  более слабым требованием о регулярности функции  $\phi^2(x)$ .

3. Случай однородных граничных условий. Полагая

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0,$$

получаем

$$\Omega(x) = \Omega_2(x) = 0,$$

и формулы для  $P_k(x, \eta)$  принимают вид:

$$P_0(x, \eta) = 0,$$

$$P_1(x, \eta) = 0,$$

$$P_2(x, \eta) = \frac{1}{2}f_0[\eta^2 - \eta(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2],$$

$$P_3(x, \eta) = \frac{1}{2}f_1[\eta^3 - \eta(\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2) + (\phi_1^2\phi_2 + \phi_1\phi_2^2)],$$

$$\dots\dots\dots$$

Построением функций  $P_k(x, \eta)$  задача решения уравнения (10) с гранич-

ными условиями (11) формально разрешена. Имея выражение функции  $\Phi(x, \eta; \lambda)$ , мы можем получить и функцию  $\varphi(x, y)$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) + \lambda P_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) + \lambda^2 P_2\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) + \dots + \\ &= \frac{1}{\lambda} \Omega y + \Omega_2 + \frac{1}{2} (f_0 - D_x^2 \Omega_2) [y^2 - y\lambda(\phi_1 + \phi_2) + \lambda^2 \phi_1 \phi_2] + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{3!} (D_x^2 \Omega_1) [y^3 - y\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_1 \phi_2 + \phi_2^2) + \lambda^3(\phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 \phi_2^2)] + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

Это выражение показывает, между прочим, что мы можем получать регулярные при  $\lambda \rightarrow 0$  решения задачи только при условии

$$\Omega_2 = 0,$$

или, что то же,

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x). \quad (19)$$

Если иметь в виду, что  $\Omega_1$  дает наклон сечений поверхности, полученной линейным интерполированием по  $\eta$  (или  $y$ ) граничных значений, то условие это представляется вполне естественным. Если условие (19) выполнено, то

$$\Omega_2 = \varphi(x)$$

и выражение для  $\varphi(x, y)$  принимает вид:

$$\varphi(x, y) = \varphi + \frac{1}{2} (f_0 - D_x^2 \varphi) [y^2 - y\lambda(\phi_1 + \phi_2) + \lambda^2 \phi_1 \phi_2] + \dots \quad (20)$$

IV. Займемся теперь вопросом о сходимости полученного разложения. Мы будем изучать решения нашей задачи как функции  $\lambda$  и в частности рассмотрим вопрос о приближенных решениях, пригодных при малых значениях  $\lambda$ . Такое направление исследования заставляет нас ограничиться случаем выполнения условия (19).

Желая получить приближенные решения задачи, пригодные при малых значениях  $\lambda$ , мы обследуем асимптотическую сходимость при  $\lambda \rightarrow 0$  частных сумм ряда (20) к решению задачи. С точки зрения приближенного решения это представляет больший интерес, чем изучение обычной сходимости ряда.

Мы будем предполагать существование решения  $\varphi(x, y)$  уравнения (4), удовлетворяющего условиям (6). Положим

$$\rho_n(x, y; \lambda) = \varphi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda P_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \dots - \lambda^n P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \quad (21)$$

и вычислим оператор Лапласа от этого выражения. Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2} = r_{n-2}(x, y) - \lambda^{n-1} D_x^2 P_{n-1}\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda^n D_x^2 P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right), \quad (22)$$

где

$$r_{n-2}(x, y) = f(x, y) - \sum_{h=0}^{n-2} f_h(x) y^h.$$

Кроме того, функция  $\rho_n(x, y; \lambda)$  обращается в нуль на контуре области  $G_\lambda$ . Обозначим правую часть уравнения (22) через  $q_n(x, y; \lambda)$ . Перед

нами стоит задача оценить функцию  $\rho_n(x, y; \lambda)$  по значениям  $q_n(x, y; \lambda)$ . Это делается легко на основании следующей леммы.

**ЛЕММА.** Если функция  $F^*(x, y)$  обращается в нуль на границе области  $G^*$  и удовлетворяет внутри нее уравнению

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} = -M,$$

то для всякой функции  $F(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(x, y),$$

в области  $G$ , являющейся частью области  $G^*$  и обращающейся в нуль на границе этой области  $G$ , имеем

$$|F(x, y)| < |F^*(x, y)|$$

внутри и на границе  $G$ , если только

$$|f(x, y)| < M$$

в этой области и на ее границе<sup>1</sup>.

Указанная лемма может быть дана еще и в такой форме: при указанных в лемме условиях

$$|F(x, y)| < \frac{M}{2} |\phi(x, y)|,$$

где  $\phi(x, y)$  — функция напряжений при кручении для любой области, содержащей область  $G$ . Тожественность этой формулировки с преж-

<sup>1</sup> Доказательство этой леммы совершенно элементарно. На основании теоремы акад. С. А. Чаплыгина [6] имеем

$$F^*(x, y) > 0$$

внутри  $G^*$ , а значит и на границе  $G$ . Построим вспомогательную функцию  $\Phi(x, y)$ , определяемую требованиями:

$$1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -M,$$

$$2) \quad \Phi(x, y) = 0 \text{ на границе } G.$$

Очевидно, что

$$\Phi(x, y) < F^*(x, y)$$

внутри и на границе  $G$ . образуем разность

$$\Phi_1(x, y) = F(x, y) - \Phi(x, y).$$

Функция  $\Phi_1(x, y)$  обращается в нуль на границе  $G$  и для нее

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = f(x, y) + M > 0.$$

Но тогда по той же теореме С. А. Чаплыгина

$$\Phi_1(x, y) < 0$$

внутри  $G$ . Значит

$$F(x, y) < \Phi(x, y) < F^*(x, y).$$

Чтобы получить оценку снизу, достаточно рассмотреть вместо  $F^*(x, y)$  функцию  $-F^*(x, y)$ . Аналогично будем иметь:

$$F(x, y) > -F^*(x, y).$$

ней становится очевидной, если мы вспомним, что функция  $\phi(x, y)$  определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2$$

и обращается в нуль на границе области. Последняя формулировка представляет большое удобство в приложениях в виду того, что задача кручения решена для многих областей и тем самым, следовательно, разрешен вопрос о создании эффективных мажорант для частей этих областей. В частности, например, весьма удобным во многих случаях является мажорирование при помощи эллипса, охватывающего данную область  $G$ .

Так как для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

мы имеем

$$\phi(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

то для функции  $F(x, y)$  получается оценка

$$|F(x, y)| < \frac{Ma^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (23)$$

или

$$|F(x, y)| < \frac{Ma^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \quad (23')$$

Здесь  $a$  и  $b$  мы можем считать полуосями наименьшего эллипса, описанного около области  $G$ .

Применим эти соображения к нашему случаю. Мы имеем

$$q_n(x, y; \lambda) \leq |r_{n-2}| + \lambda^{n-1} \left| D_x^2 P_{n-1} \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| + \lambda^n \left| D_x^2 P_n \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right|. \quad (24)$$

Оценивая первое слагаемое правой части, получаем

$$|r_{n-2}(x, y)| \leq \lambda^{n-1} \{ |\eta^{n-1} f_{n-1}(x)| + \lambda |\eta^n f_n(x)| + \dots \} < \lambda^{n-1} g_{n-2}, \quad (25)$$

так как по предположению ряд (8) сходится абсолютно в области  $G_1$ . Что касается второго и третьего слагаемого правой части неравенства (24), то мы выделим из них множители

$$\begin{aligned} \left| D_x^2 P_{n-1} \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| &= |D_x^2 P_{n-1}(x, \eta)|, \\ \left| D_x^2 P_n \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| &= |D_x^2 P_n(x, \eta)|. \end{aligned}$$

Эти множители, рассматриваемые как функции  $x$ , суть функции регулярные внутри и на границе области  $G_1$ , а как функции  $\eta$  — просто многочлены. Во всяком случае мы будем иметь в области  $G_1$

$$|D_x^2 P_n(x, \eta)| < p_n,$$



а значит и

$$\left| D_x^2 P_n \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| < p_n \quad (26)$$

в области  $G_\lambda$  и притом равномерно относительно  $\lambda$ . Используя оценки (25) и (26), получим из неравенства (24)

$$|q_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{n-1} [q_{n-2} + p_{n-1} + \lambda p_n].$$

Применим теперь приведенную выше лемму. Пусть эллипс с полуосями  $\alpha$  и  $\beta$  содержит внутри себя область  $G_1$ . Тогда, очевидно, можно подобрать эллипс с полуосями  $\alpha$  и  $\beta\lambda$ , который будет содержать область  $G^\lambda$  и мы будем иметь согласно (23')

$$|\rho_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{n+1} \frac{[g_{n-2} + p_{n-1} + \lambda p_n] \alpha^2 \beta^2}{2(\alpha^2 + \lambda^2 \beta^2)} \quad (n \geq 2). \quad (27)$$

Для  $n=0$  оценка не получается из этой формулы, но легко может быть получена непосредственно. В самом деле

$$\rho_0(x, y; \lambda) = \Phi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial y^2} = f(x, y) - \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \quad (22')$$

так как согласно первому уравнению (16)

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = 0.$$

Из уравнения (22'), проводя оценку, подобную (27), получим:

$$|\rho_0(x, y; \lambda)| < \lambda^2 \frac{[g + p_0] \alpha^2 \beta^2}{2(\alpha^2 + \lambda^2 \beta^2)}, \quad (27')$$

где

$$g = \max |f(x, y)|$$

в области  $G_1$ .

Формулы (27) и (27') решают вопрос об асимптотической сходимости разложения (20), так как из них следует, что при  $\lambda \rightarrow 0$  будем иметь для любого  $n$  стремление к нулю  $\rho_n(x, y; \lambda)$ . Случай  $n=1$  специального рассмотрения не требует, так как  $P_1(x, \eta) = 0$ .

V. Рассмотрим, в качестве примера приложения описанного выше метода, задачу о кручении призматического стержня, поперечное сечение которого ограничено кривой

$$y^2 = \lambda^2 x(1-x)^2. \quad (28)$$

Решение задачи кручения для такого стержня представляет значительный практический интерес в виду большого сходства контура (28) с винтовыми и крыловыми симметричными профилями (фиг. 2), и потому эта задача служила предметом исследования многих ученых, в том числе и Динкана [4], который развил весь метод «параметра толщины», главным образом в связи с ней. Задача кручения, как уже было указано, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2$$

с граничным условием  $\varphi = 0$  на контуре области, заданном в данном случае уравнением (28). Применяя метод, развитый выше, мы должны положить в полученных ранее формулах:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0,$$

$$\psi_1(x) = -\psi_2(x) = \psi(x) = \sqrt{x(1-x)},$$

$$\psi^2(x) = x(1-x)^2.$$

Мы будем в данном случае иметь симметричную область, однородные граничные условия и в качестве правой части уравнения, подлежащего решению,

$$f(x, y) = -2,$$

т. е.

$$f_0(x) = -2, \quad f_k(x) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Все это приводит к весьма простым выражениям для  $P_n(x, \eta)$ :

$$\left. \begin{aligned} P_0(x, \eta) &= 0, \\ P_1(x, \eta) &= 0, \\ P_2(x, \eta) &= \psi^2(x) - \eta^2, \\ P_3(x, \eta) &= 0, \\ P_4(x, \eta) &= \frac{1}{2} [D^2 \psi^2(x)] [\psi^2(x) - \eta^2], \\ P_5(x, \eta) &= 0, \\ P_6(x, \eta) &= \frac{1}{4} \left\{ \psi^2(x) \cdot D^4 \psi^2(x) + 2D^3 \psi^2(x) \cdot D \psi^2(x) + \right. \\ &\quad \left. + [D^2 \psi^2(x)]^2 \right\} [\psi^2(x) - \eta^2] - \frac{1}{24} [D^4 \psi^2(x)] [\psi^4(x) - \eta^4]. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Выражения эти были даны в нашей заметке<sup>[5]</sup>. Подставляя сюда

$$\psi^2(x) = x(1-x)^2,$$

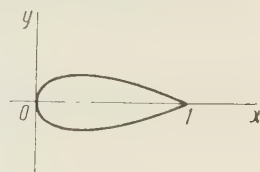
получаем

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 0, \\ P_1 &= 0, \\ P_2 &= x - 2x^2 + x^3 - \eta^2, \\ P_3 &= 0, \\ P_4 &= (3x - 2)(x - 2x^2 + x^3 - \eta^2), \\ P_5 &= 0, \\ P_6 &= (18x^2 - 24x + 7)(x - 2x^2 + x^3 - \eta^2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и в качестве решения будем иметь согласно формуле (18) выражение

$$\varphi(x, y) = [\lambda^2(x - 2x^2 + x^3) - y^2] + \lambda^2(3x - 2)[\lambda^2(x - 2x^2 + x^3) - y^2] + \lambda^4(18x^2 - 24x + 7)[\lambda^2(x - 2x^2 + x^3) - y^2] + \dots, \quad (31)$$

полученное Дэнканом ([4], стр. 16).



Фиг. 2

Рассмотрим вопрос о точности тех приближенных решений, которые получаются из этого разложения при сохранении в нем одного, двух или трех членов. Для того чтобы это сделать, нам придется оценить функции  $\rho_n(x, y; \lambda)$  при  $n = 2, 4, 6$ . Для оценки мы можем воспользоваться формулой (27), подсчитав предварительно константы

$$p_n = \max_{G_1} |D_x^2 P_n(x, \eta)| \quad (n = 2, 4, 6).$$

Простые вычисления дают

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= 4, \\ p_4 &= 14, \\ p_6 &= 52. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Что касается  $g_n$ , то очевидно, что  $g_n = 0$  для  $n \geq 1$ . Кроме того, легко видеть, что круг

$$y^2 - x(1 - x) = 0 \quad (33)$$

охватывает область  $G_1$ , ограниченную кривой

$$y^2 - x(1 - x)^2 = 0, \quad (34)$$

и потому мы можем положить в оценке (27)

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} |\rho_2| &< \frac{1}{2} \lambda^4, \\ |\rho_4| &< \frac{7}{4} \lambda^6. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Формулы (36) дают возможность весьма легко оценить точность, достигаемую при сохранении в формуле (31) одного или двух членов. Мы воспользуемся полученными результатами для оценки точности приближенных формул для жесткости на кручение  $T$ , которая, как уже указывалось выше, определяется равенством:

$$T = 2 \int_{G_\lambda} \int \varphi(x, y) dx dy. \quad (37)$$

Подставляя вместо  $\varphi(x, y)$  выражение (31) и интегрируя по области  $G_\lambda$ , будем иметь:

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 \left[ 1 - \frac{11}{13} \lambda^2 + \lambda^4 + \dots \right], \quad (38)$$

что совпадает с вычислениями Дэнкана.

Оценим погрешность, допускаемую нами при сохранении первых членов этой формулы. Сохраняя один член, будем иметь:

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 + R_2. \quad (39)$$

Здесь введено обозначение

$$R_n = 2 \int_{G_\lambda} \int \rho_n(x, y; \lambda) dx dy.$$

Для оценки  $R_n$  мы воспользуемся формулой (23). Очевидно, будем иметь подобно (27)

$$|\rho_n(x, y; \lambda)| < \frac{\lambda^{n-1} [g_{n-2} + p_{n-1} + \lambda p_n]}{2} \phi(x, y),$$

где  $\phi(x, y)$  — функция кручения для эллипса  $\bar{G}_\lambda$ ,

$$y^2 - \lambda^2 x(1-x) = 0.$$

Но тогда

$$|R_n| < \lambda^{n-1} \frac{g_{n-2} + \lambda p_{n-1} + p_n}{2} T_0, \quad (40)$$

где  $T_0$  — жесткость кручения для эллипса  $\bar{G}_\lambda$ :

$$T_0 = 2 \iint_{\bar{G}_\lambda} \phi(x, y) dx dy = \frac{\pi \lambda^3}{16(1+\lambda^2)}.$$

Подставляя это значение в неравенство (40) и учитывая, что при  $n = 2, 4, 6$  будет

$$g_{n-2} = p_{n-1} = 0,$$

получим:

$$|R_n| < \lambda^{n+3} \frac{\pi p_n}{32(1+\lambda^2)},$$

или, несколько увеличивая правую часть,

$$|R_n| < 0.1 p_n \lambda^{n+3}.$$

Эта формула дает:

$$|R_2| < 0.4 \lambda^5,$$

$$|R_4| < 1.4 \lambda^7,$$

$$|R_6| < 5.2 \lambda^9.$$

Чтобы оценить точность формулы (39), найдем относительную погрешность

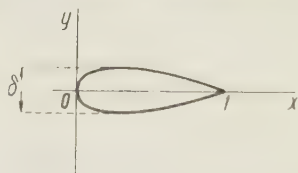
$$\Delta_2 = \frac{3465}{256} \lambda^{-3} \cdot 0.4 \lambda^5 = 5.4 \lambda^2. \quad (41)$$

Если мы желаем получить при помощи формулы (39) величину  $T$  с точностью в 1%, то по формуле (41) значения  $\lambda$  должны удовлетворять неравенству

$$\lambda < 0.043. \quad (42)$$

Для того чтобы сделать этот результат более наглядным, мы можем заметить, что толщина  $\delta$  нашего профиля (фиг. 3) дается формулой:

$$\delta = \frac{4 \sqrt[3]{3}}{9} \lambda = 0.770 \lambda.$$



Фиг. 3

Подставляя сюда  $\lambda$  из неравенства (42), получаем

$$\delta < 0.033.$$

Это последнее неравенство показывает, что формула

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 \quad (43)$$

дает относительную погрешность, заведомо не превосходящую 1% лишь для очень тонких профилей, толщина которых не превосходит при-

мерно 0.03 их длины. Этот результат разрешает и вопрос о точности формулы Гриффита, так как в применении к данному профилю формула Гриффита как раз и дает (43).

Таким образом приходится признать, что формулы типа Гриффита могут быть применяемы лишь для исключительно тонких профилей.

Полагая

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 \left[ 1 - \frac{11}{13} \lambda^2 \right] + R_4, \quad (44)$$

мы получаем аналогично (40)

$$|R_4| < 1.4 \lambda^7.$$

Относительная погрешность для  $\lambda < 1$  будет

$$\Delta_4 < 18.94 \lambda^4$$

и из требования

$$\Delta_4 < 0.01$$

мы получаем

$$\lambda < 0.152.$$

Это соответствует профилям относительной толщины

$$\delta < 0.117,$$

что уже достаточно для большинства практически интересных случаев:

Л. С. Лейбензон, исследуя задачу о кручении рассматриваемого профиля методом Ритца [7], получил для жесткости  $T$  формулу:

$$T = 0.07387 \frac{\lambda^3}{1 + \frac{11}{13} \lambda^2}.$$

Нами указывалось [8], что эта формула дает первые два члена разложения (38), если заменить коэффициент 0.07387 через

$$\frac{256}{3465} = 0.07388.$$

Таким образом все сказанное относительно точности формулы (44) применимо и к этой формуле. Если писать выражение для  $T$  в виде

$$T \approx \frac{256}{3465} \frac{\lambda^3}{1 + \frac{11}{13} \lambda^2}, \quad (45)$$

то можно предполагать, что оно будет даже несколько точнее, чем (44), так как при разложении этого выражения в ряд по степеням  $\lambda$  мы получим еще члены и кроме второго, и они могут уменьшить расхождение. При малых  $\lambda$  это будет именно так, в виду одинакового знака у члена с  $\lambda^4$  в формуле (38) и в разложении по степеням  $\lambda$  дроби (45).



## ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Тимошенко С. П., Курс теории упругости, ч. I, СПб, 1914.
- <sup>2</sup> Griffith, Preliminary Report on the twisting of Propeller Blades. R & M., № 454 (1918).
- <sup>3</sup> Prescott J., Applied Elasticity, 1924.
- <sup>4</sup> Duncan, W.J., Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes, R. & M., № 1444 (1932).
- <sup>5</sup> Панов Д. Ю., Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных, ДАН, Новая серия, т. III (VIII), 1935, № 2 (62), стр. 63—66.
- <sup>6</sup> Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, т. III, стр. 77, 1935.
- <sup>7</sup> Лейбензон Л. С., О расчете на кручение лопастей пропеллера, Труды ЦАГИ, вып. 8., 1924.
- <sup>8</sup> Панов Д. Ю., О кручении стержней, поперечное сечение которых ограничено кривой (печатается).

## D. PANOV. SOLUTION DES PROBLÈMES LIMITES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES POUR LES DOMAINES LONGS ET ÉTROITS

## RÉSUMÉ

Le présent article a pour but l'étude d'une méthode pour résoudre les problèmes limites des équations aux dérivées partielles dans les cas des domaines longs et étroits. Cette méthode utilisée par W. Duncan a pour base le développement de la solution suivant les puissances d'un paramètre  $\lambda$  introduit dans l'équation du contour du domaine et tel que l'épaisseur du domaine tend vers zéro avec  $\lambda$ . On considère en détail le cas de l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

en supposant que les valeurs limites de  $\varphi$  sur le contour du domaine sont données. On démontre la convergence asymptotique pour les petites valeurs de  $\lambda$  de la série formellement construite

$$\varphi(x, y) = P_0 + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \dots + \lambda^n P_n + \dots$$

On voit que dans certaines conditions on a

$$\left| \varphi(x, y) - \sum_{k=1}^n P_k \lambda^k \right| < \lambda^{n+1} C_n$$

à l'intérieur et sur le contour du domaine considéré,  $C_n$  étant une constante que l'on peut effectivement déterminer et qui dépend du domaine, du second membre de l'équation (1) et de l'indice  $n$ . En cas d'exemple on considère en détail la solution du problème de la torsion d'une tige, limitée par une courbe

$$y = k\sqrt{x}(1-x)$$

et l'on évalue la précision des solutions approchées obtenues en conservant un, deux ou trois termes de la série.



Л. В. КАНТОРОВИЧ

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ<sup>1</sup>

Обзор ряда работ, в которых предложены различные методы построения функции, совершающей конформное отображение. Главным образом рассмотрены методы, разработанные в последние годы в Научно-исслед. ин-те математики и механики (НИИММ) Ленинградского гос. университета. Основные разделы доклада: 1) вариационные методы, 2) формула Кристоффеля-Шварца, 3) метод последовательных приближений, 4) интегральные уравнения, 5) графоаналитический метод П. В. Мелентьева.

В настоящей статье мною рассмотрены некоторые методы, дающие возможность эффективного построения функции, совершающей отображение<sup>2</sup>. При этом я имею в виду, главным образом, те методы, которые были впервые выдвинуты или усовершенствованы сотрудниками Научно-исследовательского института математики и механики (НИИММ) при Ленинградском государственном университете за последние несколько лет [1].

## § 1. Вариационные методы

Могут быть построены различные методы, основанные на вариационных принципах. Рассмотрим прежде всего метод, предложенный Бибербахом в 1914 г.[2]. Пусть дана некоторая область  $D$  в плоскости комплексного переменного  $z$ ; для удобства будем считать, что начало  $z=0$  лежит в ней. Будем рассматривать всевозможные функции  $w = f(z)$ , удовлетворяющие условиям:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1 \quad (1)$$

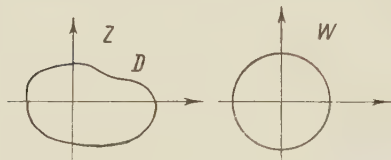
и отображающие конформно область  $D$  на некоторые другие. Площадь отображенной области будет наименьшей в том случае, когда эта область есть круг. Но площадь отображенной области дается интегралом

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

<sup>2</sup> Более подробное изложение рассматриваемых здесь методов дано в гл. 5 книги Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Методы приближенного решения уравнений в частных производных», ОНТИ, 1936. См. также труды НИИММ при ЛГУ, т. II, Конформное отображение односвязных и многосвязных областей.

$$I = \iint_D f'(z) \overline{f'(z)} dx dy. \quad (2)$$

Таким образом: среди всех функций, регулярных в области  $D$  и удовлетворяющих условию (1), наименьшее значение интегралу  $I$  дает та, которая совершает отображение области  $D$  на круг.



Фиг. 1

Для приближенного решения задачи о минимуме интеграла  $I$  может быть с успехом применен метод Рунца. Рассмотрим для этого любые функции  $u_0(z)$ ,  $u_1(z)$ , ...,  $u_n(z)$ , регулярные в области  $D$ , линейно-

независимые и удовлетворяющие условиям:

$$u_0(0) = 1; \quad u_1(0) = \dots = u_n(0) = 0.$$

Составим линейную комбинацию:

$$\varphi_n(z) = u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z).$$

Заметим, что условия (1) будут автоматически удовлетворены, если принять  $f'(z) = \varphi_n(z)$ ;  $f(z) = \int_0^z \varphi_n(z) dz$ . Будем теперь искать постоянные  $c_1, \dots, c_n$ , чтобы сделать интеграл  $I$  минимальным. После подстановки  $\varphi_n(z)$  в интеграл дело сводится к отысканию минимума квадратичной формы, что приводит к системе линейных уравнений:

$$\alpha_{k,0} + \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} c_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad \alpha_{kj} = \iint_D u_j \overline{u_k} dx dy. \quad (A)$$

Если  $c_i$  удовлетворяют уравнениям (A), то  $\int_0^z \varphi_n(z) dz$  дает искомое приближенное значение для отображающей функции.

Во многих случаях бывает удобно принять

$$u_0(z) = 1; \quad u_1(z) = z; \quad \dots \quad u_n(z) = z^n,$$

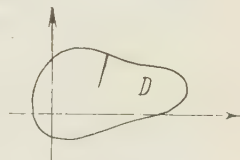
тогда  $\varphi_n(z)$  оказывается полиномом. Наибольшую трудность при применении метода, кроме решения системы (A), представляет обычно весьма утомительное вычисление интегралов, дающих коэффициенты  $\alpha_{k,j}$ , хотя при специальном виде области в него могут быть внесены известные упрощения. Укажем, что вычисления, которые встречаются здесь, эквивалентны вычислениям, необходимым для построения ортогональных полиномов Бохнера-Бергмана для данной области.

Относительно сходимости процесса заметим, что если только  $\varphi_n(z)$  — минимизирующая последовательность, т. е. если  $I(\varphi_n) \rightarrow \min I(\varphi)$ , то функции  $\varphi_n(z)$  сходятся в области к производной отображающей функ-

ции  $f'(z)$ . Для того же, чтобы последовательность  $\varphi_n(z)$  была минимизирующей, достаточно, чтобы функции  $u_n(z)$  образовывали в  $D$  полную систему, т. е. чтобы ими было возможно аппроксимировать любую регулярную функцию. Например это будет выполнено в силу известной теоремы Рунге, если за  $u_i$  взять степени  $z$  для любой односвязной области  $D$ , граница которой служит одновременно границей внешней области, т. е. если не допускаются разрезы, идущие внутрь области (фиг. 2).

На тех же принципах можно обосновать и отображение внешности одной области на другую.

Аналогичный способ может быть основан на другом экстремальном свойстве отображающей функции:



Фиг. 2

Среди всех функций, регулярных в области  $D$  и удовлетворяющих условиям (I), функция, дающая конформное отображение области  $D$  на круг, дает наименьшее значение интегралу

$$I_1 = \int_L |f'(z)|^2 ds, \quad (3)$$

равному длине образа контура  $L$  области  $D$ .

Исходя отсюда, можно поступать так же, как в предыдущем случае. Можно искать вместо минимума интеграла (3) минимум интеграла

$$I_1 = \int_L |\varphi(z)|^2 ds = \int_L \varphi(z) \overline{\varphi(z)} ds; \quad (3')$$

после того как функция  $\varphi(z)$  будет найдена,  $f$  определится легко:

$$f(z) = \int_0^z \varphi^2(z) dz.$$

Для нахождения минимума интеграла (3') может быть применен тот же способ Ритца с той разницей, что здесь вместо интегралов по областям придется вести вычисление контурных интегралов, что может оказаться иногда более удобным. Этот способ связан с полиномами Сеге ортогональными по контуру, так же как предыдущий с полиномами Бохнера-Бергмана.

Применение этого минимального принципа для приближенного построения отображающей функции было предложено В. И. Крыловым.

Рассмотрим здесь еще один метод, основанный на связи задачи о конформном отображении с задачей Дирихле.

Известно, что задачу о конформном отображении некоторой области можно привести к нахождению для нее функции Грина; именно, если  $f(z)$  функция, отображающая область на единичный круг, то функция  $\lg |f(z)|$  будет функцией Грина для области  $D$ . Рассмотрим функцию  $u(x, y) = \lg \left| \frac{f(z)}{z} \right|$ . Это есть гармоническая функция, которая удовлетворяет граничному условию

$$u = -\lg r \text{ на контуре.}$$

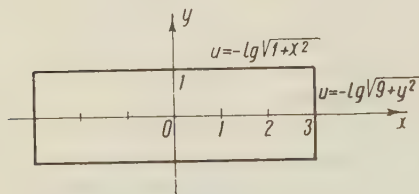


Нахождение этой функции даст возможность найти  $f(z)$ .

Для нахождения  $u$  можем воспользоваться опять вариационными методами. Именно, нужно минимизировать интеграл

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (4)$$

Для решения этой задачи воспользоваться способом Ритца трудно, так как граничные условия не нулевые. Здесь можно использовать мо-



Фиг. 3

дифференциацию его, которая была мною предложена в 1932 г. [3]. Этот метод состоит в том, что задача решения уравнения в частных производных приблизительно заменяется задачей решения обыкновенного дифференциального уравнения или системы таких уравнений.

Рассмотрим, например, задачу нахождения функции Грина для прямоугольника со сторонами 2 и 6 (фиг. 3). Ищем решение в виде

$$u = (1 - y^2) \varphi(x) - \lg \sqrt{x^2 + 1},$$

так как тогда при  $y = \pm 1$  граничные условия будут удовлетворены, какова бы ни была  $\varphi(x)$ . Можно теперь подставить это выражение в интеграл (4); получим интеграл, зависящий от функции одного переменного:

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 4 \int_0^3 \left[ \frac{4}{3} \varphi^2 + \frac{8}{15} \varphi'^2 - \frac{4}{3} \frac{x}{1+x^2} \varphi' + \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \right] dx.$$

Минимизируя этот интеграл, получим для определения функции  $\varphi$  дифференциальное уравнение:

$$\varphi'' - \frac{5}{2} \varphi = \frac{5}{4} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Мы должны найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям  $\varphi(3) = \varphi(-3) = \lg \frac{\sqrt{10}}{3}$ . Легко найти, заменяя в выражении для  $\varphi$  интеграл приближенно по формуле Симпсона и определяя постоянную  $C$  из условия  $\varphi(3) = \lg \frac{\sqrt{10}}{3}$ , что

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} x + \int_0^x \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} (x-t) \cdot \frac{5(1-t^2)}{4(1+t^2)^2} dt \approx \\ &\approx -0.228 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} x + \frac{\sqrt{10}}{3} x \left[ \frac{1}{16} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} x + 4 \frac{16-x^2}{(16+x^2)^2} \operatorname{sh} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} x + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{16-4x^2}{(16+4x^2)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} x + 4 \frac{16-9x^2}{(16+9x^2)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} x \right]. \end{aligned}$$

А тогда для  $u$  находим следующее приближенное выражение:

$$u = (1 - y^2) \varphi(x) - \lg \sqrt{x^2 + 1}.$$

В частности, например,  $u(0, 0) = -0.228$ .

После того как  $u$  найдена, легко установить соответствие между областями, отвечающее конформному отображению. Так, линии  $u = \lg \frac{c}{|z|}$  при различных постоянных  $C$  дадут линии, отвечающие концентрическим окружностям.

Тот же способ может быть применен и по отношению к областям других видов (см. фиг. 4), только дифференциальное уравнение будет с постоянными коэффициентами лишь в случае параллелограмма (фиг. 4а); для трапеции, изображенной на фиг. 4б, это будет уравнение Эйлера, а для трапеции, изображенной на фиг. 4с,—уравнение Гаусса.

## § 2. О формуле Кристоффеля-Шварца

Вопрос об отображении полигональных областей весьма полно освещен в статье С. Б. Бергмана [7]. Поэтому я имею в виду ограничиться здесь двумя небольшими замечаниями.

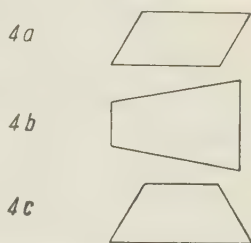
1. Функция, отображающая полуплоскость на внутренность многоугольника, может быть получена в форме интеграла Кристоффеля-Шварца

$$f(z) = c_1 \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz.$$

Лишь в отдельных случаях интеграл сводится к эллиптическому и можно пользоваться таблицами. Так как подинтегральная функция имеет особенности, приближенные методы вовсе неприменимы непосредственно или дают очень большую погрешность. Я хочу обратить внимание на следующий элементарный прием [4], аналогичный по идее методу улучшения сходимости тригонометрических рядов акад. А. Н. Крылова, который может оказаться здесь полезным. Рассмотрим сначала более простой случай, когда в промежутке имеется лишь одна особая точка. Тогда интеграл можно записать так:

$$I = \int_a^b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \varphi_1(z) dz,$$

причем точка  $z = a_1$  не является особой точкой функции  $\varphi_1(z)$ . Разобьем интеграл на два, выделив из  $\varphi_1(z)$ , например, два первых члена ее разложения в ряд Тейлора; получим:



Фиг. 4

$$I = I_1 + I_2 = \int_a^b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \left[ \varphi(a_1) + \varphi'(a_1)(z - a_1) \right] dz + \\ + \int_a^b (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \left[ \varphi(z) - \varphi(a_1) - \varphi'(a_1)(z - a_1) \right] dz.$$

Первый интеграл легко вычисляется точно, для второго точка  $z = a_1$  не будет особой, так как второй множитель содержит  $(z - a_1)^2$  и потому  $I_2$  может быть вычислен с помощью формул приближенного интегрирования. В случае, если в промежутке интегрирования будет несколько особых точек, то можно выделить части ряда Тейлора соответственно каждой точке, либо разбить промежуток интегрирования и тем свести дело к первому случаю. При пользовании указанным приемом аппарат интегралов Кристоффеля-Шварца оказывается вполне удобным для представления отображающей функции.

2. Если с помощью формулы Кристоффеля-Шварца желают получить отображение на определенный многоугольник, то основную трудность представляет определение постоянных. Их определение приводит вообще к решению системы весьма сложных трансцендентных уравнений. Однако для решения этой системы может быть с успехом применен метод Ньютона, если известны первые приближения для искомых параметров. Исследование применимости метода Ньютона, а также тех условий, которым должны удовлетворять первые приближения, чтобы была обеспечена сходимость процесса, было произведено аспирантом НИИММ Н. П. Стениным.

В результате при решении задачи отображения на полигональную область наиболее удобным мне представляется такой порядок:

1. Найти грубо приближенное отображение полуплоскости на полигон любым методом, например вариационным способом, и по точкам, которые будут отвечать вершинам, найти первые приближения для параметров.

2. Отыскать точные значения параметров, пользуясь методом последовательных приближений Ньютона.

3. После того как параметры определены, а также в процессе их нахождения значение отображающей функции вычислять из ее интегрального представления, применяя метод выделения особенностей.

### § 3. Метод сопряженных тригонометрических рядов и методы последовательных приближений

Пусть мы желаем отобразить единичный круг на область, ограниченную некоторым контуром. Если бы отображающая функция была известна

$$z = x + iy = f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \zeta^n,$$

то полагая в ней  $\zeta = e^{it}$  и отделяя вещественную и мнимую части, мы получили бы следующее параметрическое представление контура области:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt - b_n \sin nt), \\ y &= \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nt + a_n \sin nt). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Напротив, если бы нам было известно такое представление контура — с помощью сопряженных тригонометрических рядов, — то легко было бы получить отображающую функцию. Для нахождения такого представления, если уравнение контура дано, например, в виде

$$x^2 + y^2 + \lambda F(x, y) = 1,$$

где  $F$  — аналитическая функция, можно подставить вместо  $x$  и  $y$  из (5) тригонометрические ряды и в полученном выражении приравнять нулю коэффициенты при всех косинусах и синусах. Тогда получим для нахождения  $a_n$  и  $b_n$  бесконечную систему уравнений, которую можно решать по способу последовательных приближений [5].

Так, например, для эллипса  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = \frac{1}{4}$  таким способом находим отображающую функцию с точностью до 0.02 в виде  $z = 0.99 \zeta + + 0.12 \zeta^3 + 0.03 \zeta^5 + 0.01 \zeta^7$ .

Перейдем теперь к методу последовательных приближений.

Предположим, что рассматриваемая область близка к некоторой области, отображение круга на которую известно. Иначе говоря, предполагаем, что уравнение контура, а потому и ограниченная им область  $D_\lambda$  зависит от параметра  $\lambda$ :

$$F(z, \bar{z}, \lambda) = 0,$$

причем при  $\lambda=0$  отображение на область  $D_0$  дает известная функция  $z = \chi_0(\zeta)$ . Естественно отображающую функцию искать в виде ряда:

$$z = \chi(\zeta, \lambda) = \chi_0(\zeta) + \lambda \chi_1(\zeta) + \lambda^2 \chi_2(\zeta) + \dots$$

Тогда для функций  $\chi(\zeta)$  легко указать определяющие их рекуррентные соотношения. Для определенности проведем вычисление первого приближения. Когда  $\zeta$  принадлежит единичной окружности,  $z$  должно лежать на граничной кривой. Поэтому, подставив выражения  $z$  в уравнение кривой, можем приравнять нулю члены, содержащие первые степени  $\lambda$ , откуда найдем:

$$F'_z(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \chi_1 + F'_{\bar{z}}(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \bar{\chi}_1 + F'_\lambda(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) = 0.$$

Далее, так как  $\chi_0(\zeta)$  удовлетворяет уравнению  $F(\chi_0(\zeta), \overline{\chi_0(\zeta)}, 0) = 0$ , то, дифференцируя его по  $it$ , получим:

$$F'_z(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \zeta \chi'_0 + F'_{\bar{z}}(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0) \bar{\zeta} \bar{\chi}'_0 = 0.$$

Отсюда исключением легко находим:

$$2R \left( \frac{\chi_1}{\xi \chi_0'} \right) = \Lambda_1 = - \frac{F'_{\lambda}(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0)}{\chi_0' \xi F'_{\lambda}(\chi_0, \bar{\chi}_0, 0)}.$$

Далее, восстанавливая функцию по ее действительной части, получим:

$$\chi_1 = \frac{\chi_0' \xi}{2} (\Lambda_1 + i \tilde{\Lambda}_1),$$

где  $\tilde{\Lambda}_1$ —сопряженная к  $\Lambda_1$  функция, которая может быть дана сопряженным рядом или с помощью формулы Шварца.

В ряде конкретных примеров такое построение дает возможность довольно легко действительно построить отображающую функцию. Отображающая функция получается обычно в виде полинома в круге, что весьма полезно, например, в задачах теории упругости.

Способ этот пригоден также, если уравнение области дано в параметрической форме, а также если речь идет об отображении внешних областей.

Мною была установлена также сходимость метода при достаточно малых значениях  $\lambda$ . С помощью аналитического продолжения, однако, оказывается возможным получить отображающую функцию не только для малых значений параметра.

Метод этот может быть применен и для отображения многосвязных областей, но хотя он здесь и дает хорошие результаты, я не имею полного доказательства его сходимости<sup>1</sup>.

Другой метод последовательных приближений для построения отображающей функции в случае отображения области на круг был развит В. И. Крыловым.

Этот метод построен на несколько иной идее. Именно, пусть область дана в комплексной форме. Для определенности предположим, что это есть эллипс

$$z = e^{it} (1 + \lambda^2 e^{-2it}).$$

Функция, отображающая его на круг, была бы такой, что  $|f(z)| = 1$  на контуре. Будем искать полином  $P(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}$ , чтобы  $P(z) \cdot \bar{P}(\bar{z})$  было постоянным на контуре. Точно этого добиться нельзя, но мы можем вычислить выражение  $P(z) \cdot \bar{P}(\bar{z})$  и приравнять в нем нулю коэффициенты при первых степенях  $e^{it}$ . Получаем относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , некоторую систему уравнений второй степени. Эту систему можно решать затем по способу последовательных приближений.

<sup>1</sup> Пользуюсь случаем, чтобы указать на то, что энонсированные по этому вопросу в моей заметке (ДАН, 1934, II, стр. 441) результаты не следует считать установленными.



#### § 4. Приведение к интегральным уравнениям

Все основные задачи математической физики могут быть приведены к интегральным уравнениям. В частности, вполне естественно, что задача конформного отображения, которая эквивалентна задаче нахождения функции Грина для области, должна приводиться к интегральному уравнению.

Подобное уравнение в весьма удобной форме было дано в 1931 г. в работе покойного С. А. Гершгорина [6]. Приведу здесь лишь окончательный его результат. Для построения отображения достаточно знать соответствие контуров.

Предположим, что мы хотим преобразовать область  $D$  в единичный круг так, чтобы точка  $z_0$  перешла в 0, а  $z_1$  в 1 (фиг. 5).

Обозначим через  $\vartheta(s)$  аргумент точки на круге, отвечающий точке  $z(s)$  на кривой. Через  $\beta(s)$  обозначим угол, под которым виден отрезок  $z_0 z_1$  из  $z(s)$ . Тогда уравнение принимает согласно Гершгорину вид:

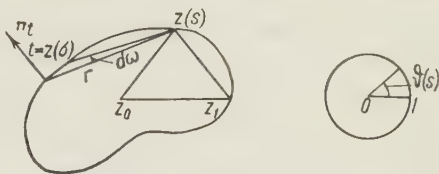
$$\vartheta(s) = \int_{\gamma} k(s, \sigma) \vartheta(\sigma) d\sigma - 2\beta(s).$$

Здесь  $k(s, \sigma)$  ядро потенциала  $k(s, \sigma) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(n_s, r)}{r}$ .

Уравнение удобно тем, что все величины, входящие в него, имеют простое геометрическое значение, в частности

$$k(s, \sigma) d\sigma = \frac{1}{\pi} d\omega.$$

Таким образом, если интегральное уравнение решают, например, заменяя его системой линейных уравнений, то система составляется очень легко.



Фиг. 5

Заметим, что уравнение пригодно и в случае угловых точек, только тогда нужно внести небольшое изменение.

Метод применяется с успехом даже в случае сложного вида областей и приводит к практически выполнимым вычислениям, особенно, если в них вносится некоторая рационализация, как это делал П. В. Мелентьев с помощью ряда остроумных приемов.

В. И. Крыловым были далее составлены системы интегральных уравнений для нахождения функции, отображающей любую многосвязную область на плоскость с прямолинейными или круговыми вырезами. Эти уравнения составлены при чрезвычайно общих условиях относительно контура; установлена единственность и существование их решения. Последнее может быть сделано как на основании теоремы Коебе о существовании отображающей функции, так и непосредственно.

Заметим, что при наличии угловых или кратных точек уравнение будет не типа Фредгольма, а типа «Belastete Integralgleichungen».

### § 5. Метод П. В. Мелентьева

Из графических и численных методов я здесь остановлюсь только на комбинированном методе, предложенном инж. П. В. Мелентьевым.

Метод этот основан на том, что для нахождения функции, отображающей круг на область, достаточно найти параметрическое представление последней с помощью сопряженных тригонометрических рядов.

Будем искать функцию вида

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^{n+1} = \alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) \zeta^{n+1},$$

переводящую единичный круг в данную область так, что 0 переходит в 0 и 1 в точку  $A$  на оси.

Удобно рассмотреть не  $z$ , а отношение:

$$u + i v = w = \frac{z}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n.$$

Если область близка к окружности, то  $\frac{z}{\zeta}$  близко к постоянной

и, следовательно,  $u$  почти постоянно, а  $v$  мало (фиг. 6).

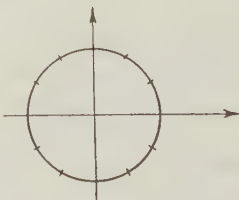
Очевидно  $u$  и  $v$  представляются так же, как  $x$  и  $y$ , сопряженными рядами:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta);$$

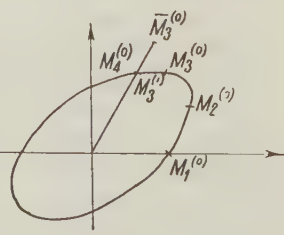
$$v = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta).$$

Для приближенного нахождения такого представления поступаем так. Прежде всего отказываемся от бесконечного ряда и задаемся определенным числом  $k$ . Разделив окружность на  $2k$  частей, получим на ней  $2k$  точек (фиг. 7).

Будем теперь подыскивать полином  $(k+1)$ -й степени такой, чтобы именно эти  $2k$  точек он переводил в точки, лежащие на кривой. Коэффициенты полинома будем находить по способу последовательных приближений. Зададимся



Фиг. 7



Фиг. 8

сначала некоторыми (предполагаемыми) положениями, в которые точки, выбранные на окружности, перейдут на кривую; пусть это будут точки  $M_i^0$ . Это даст определенные  $u^{(0)}$  и  $\varphi_i^{(0)}$ . По значениям  $u_i^{(0)}$  составим разложение  $u(\theta)$  в ряд Фурье приемами гармонического анализа, и найдем некоторые значения для коэффициентов  $a_n^{(0)}$  и  $b_n^{(0)}$ . Зная их, сможем вычислить новые значения  $\varphi: \bar{\varphi}_i^{(0)}$ , отличные от первоначальных  $\varphi_i^{(0)}$ . Тогда получим новые положения точек  $\bar{M}_i^{(0)}$ , которые уже не будут лежать на кривой. Снесем их на кривую по кратчайшему расстоянию или по радиус-вектору. Получим точки  $M_i^{(1)}$ , которые дадут новые, вообще говоря, более правильные положения точек  $M_i$ . Это даст новые значения  $u: u_i^{(1)}$ , по ним можно составить новые  $a_n^{(1)}$  и  $b_n^{(1)}$  и т. д.

Предположим, что когда мы будем продолжать этот процесс, точки  $M_i^{(s)}$  будут при  $s \rightarrow \infty$  стремиться к определенным предельным положениям  $M_i$ . Тогда мы будем иметь полином, который  $2k$  точек на единичной окружности переводит в точки на кривой. Последнее дает основание предполагать, что полученный полином вообще близок к истинной отображающей функции.

В случае областей, близких к кругу, выбор первых приближений естественен; П. В. Мелентьевым указаны удобные способы подбора первых приближений для многих других случаев, основанные на близости данной области к области, отображаемой на круг с помощью той или иной функции простого вида.

На многих практических деталях я не останавливаюсь здесь подробно.

Метод этот дает весьма хорошие результаты при решении конкретных задач, к сожалению, теоретическое исследование его автором еще не произведено.

Научно-исследовательский  
институт математики и механики  
Ленинградского гос. университета  
им. А. С. Бубнова

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Труды Ленинградского НИИММ, т. II.
- <sup>2</sup> L. Bieberbach, Rend. Circ. Mat., Palermo 1914.
- <sup>3</sup> Л. В. Канторович, Известия Академии Наук, 1933, № 5.
- <sup>4</sup> Л. В. Канторович, Математ. сборн., т. 41, вып. 2.
- <sup>5</sup> Л. В. Канторович, Математ. сборн., т. 40, вып. 3; т. 41, вып. 1.
- <sup>6</sup> С. А. Гершгорин, Математ. сборн., т. 40, вып. 1.
- <sup>7</sup> С. Б. Бергман, Изв. ОМАН Академии Наук, математ. серия, № 1 (1937).

**L. KANTOROVITCH. LES MÉTHODES EFFECTIVES DANS LA THÉORIE  
DES REPRÉSENTATIONS CONFORMES  
RÉSUMÉ**

Nous donnons l'exposé de certaines méthodes pour résoudre approximativement le problème de la représentation conforme. Nous considérons surtout les méthodes étudiées à l'Institut Mathématique de Leningrad.

1. Les méthodes du calcul des variations. La méthode de Bieberbach [2] est basée sur cette propriété extrême de la fonction réalisant la représentation conforme d'un domaine donné sur un cercle que l'image du domaine a une aire minimale. Ce fait conduit au problème de trouver le minimum d'une certaine intégrale étendue à un domaine; il peut être résolu approximativement par la méthode de Ritz. Parfois il est plus aisé de réduire le problème à la recherche du minimum d'une certaine intégrale curviligne.

La détermination de la fonction qui réalise la représentation conforme est équivalente à la recherche de la fonction de Green. Pour résoudre ce dernier problème on applique avec profit la méthode des variations proposée par l'auteur [3] et présentant une modification de la méthode de Ritz.

2. La formule de Christoffel-Schwarz. Pour calculer les intégrales il est utile d'appliquer un procédé spécial—le «dégagement de la singularité». Pour définir les paramètres dans la formule on peut profiter de la méthode des approximations successives de Newton; la possibilité de l'appliquer a été démontrée par Stenin.

3. La méthode des approximations successives. On cherche la représentation d'un cercle sur un domaine dont l'équation du contour dépend d'un paramètre. La fonction réalisant cette représentation est développée en série suivant les puissances de ce paramètre. Dans plusieurs cas on obtient des bons résultats numériques [5].

Une autre méthode d'approximations successives pour représenter un domaine sur un cercle est proposée par W. Kryloff.

4. Les équations intégrales. Pour la fonction donnant l'angle polaire d'un point sur la courbe quand on connaît l'angle du point correspondant sur le cercle, S. Gerschgorine [6] a donné une équation intégrale de forme bien commode. La solution numérique de cette équation permet même dans les cas compliqués de trouver la fonction réalisant la représentation conforme. Une méthode analogue pour les domaines multiplement connexes est proposée et étudiée par W. Kryloff.

5. La méthode grapho-analytique de P. Mientieff. On cherche un polynôme de degré  $k+1$  qui transforme  $2k$  points donnés du cercle-unité en  $2k$  points sur le contour du domaine donné. Les coefficients du polynôme s'obtiennent par la méthode des approximations successives. Le polynôme trouvé est une approximation de la fonction réalisant la représentation conforme. Cette méthode est commode et effective dans les applications, mais la convergence n'est pas encore étudiée.

Л. В. КАНТОРОВИЧ

## О ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ <sup>1</sup>

Результаты исследований автора по теории полуупорядоченных пространств. Первая часть посвящена теории линейных полуупорядоченных пространств. Такое пространство представляет многообразие, во многом сходное с множеством вещественных чисел. Вторая часть посвящена применению этой теории в функциональном анализе. В третьей части рассматриваются полуупорядоченные пространства общего вида и устанавливается связь их теории с некоторыми вопросами топологии и теории множеств.

### ВВЕДЕНИЕ

Полуупорядоченным (или частично упорядоченным) множеством называется такое множество элементов  $Y = \{y\}$ , в котором для некоторых пар элементов определено отношение  $y_1 < y_2$ . Обычно предполагается, что в таком многообразии существует наименьший элемент из следующих за данными двумя  $\sup (y_1, y_2)$  и наибольший из предшествующих обоим  $\inf (y_1, y_2)$ . Такого рода многообразия впервые рассматривались Дедекиндом и С. Шатуновским <sup>2</sup>.

Приведем следующий простой пример, указанный еще Дедекиндом. Рассмотрим множество целых положительных чисел  $\{n\}$ . Будем писать  $n_1 > n_2$ , если  $n_1$  делится на  $n_2$  без остатка, и  $n_1 < n_2$ , если  $n_1$  делит  $n_2$  ( $n_1 \neq n_2$ ). В этом случае  $\sup (n_1, n_2)$  есть наименьшее кратное этих чисел, а  $\inf (n_1, n_2)$  — их общий наибольший делитель.

За последние годы интерес к теории полуупорядоченных многообразий чрезвычайно возрос, и появилось большое число работ, в которых рассматриваются эти многообразия и их применения к вопросам абстрактной алгебры, топологии и аксиоматики геометрии. Достаточно назвать работы К. Menger, G. Birkhoff, А. Маркова, M. Stone, O. Ore, П. С. Александрова, А. Tiesker, F. Klein-Barmen и др.

В течение последнего года мною был получен ряд результатов в этой области, изложению которых и посвящена настоящая статья.

<sup>1</sup> Доложено на сессии Группы математики Академии Наук СССР 23 марта 1936 г.

<sup>2</sup> См. литературу в конце статьи.



Основными новыми моментами моих исследований являются следующие:

- 1) введение понятия предела в полуупорядоченных многообразиях;
- 2) рассмотрение линейных полуупорядоченных пространств, которые обладают многими свойствами множества вещественных чисел;
- 3) рассмотрение ряда частных пространств, элементами которых служат функции или последовательности;
- 4) применение полуупорядоченных пространств в теории линейных операций;
- 5) применение полуупорядоченных пространств к некоторым вопросам метрической теории функций;
- 6) изучение полуупорядоченных пространств как объектов топологии и дескриптивной теории функций.

## І. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ

### § 1. Полуупорядоченные пространства. Аксиомы

Пусть  $Y = \{y\}$  есть линейное многообразие, т. е. для элементов  $Y$  определена сумма  $y_1 + y_2$  и произведение элемента на вещественное число  $\lambda y$ . Будем называть  $Y$  *линейным полуупорядоченным пространством* ( $S_5$ ), если для некоторых элементов  $y \in Y$  определено отношение  $y_1 > 0$ , причем выполнены следующие аксиомы I—V:

Аксиома I. Если  $y > 0$ , то исключено, что  $y = 0$ .

Аксиома II. Если  $y_1 > 0$  и  $y_2 > 0$ , то  $y_1 + y_2 > 0$ .

Аксиома III. Каково бы ни было  $y$ , существует  $y_1$  такое, что  $y_1 > 0$  и  $y_1 - y > 0$ .

Аксиома IV. Если  $\lambda > 0$  и  $y > 0$ , то  $\lambda y > 0$ .

Мы будем еще писать:  $y < 0$ , если  $-y > 0$ ;  $y_1 > y_2$ , если  $y_1 - y_2 > 0$ ;  $y \geq 0$ , если  $y > 0$  или  $y = 0$  и т. д.

Все правила действий над неравенствами будут соблюдены, за исключением того, конечно, что может не иметь места ни одно из соотношений:

$$y_1 > y_2, \quad y_1 < y_2, \quad y_1 = y_2.$$

Множество  $E \subset Y$  будем называть *ограниченным сверху*, если существует  $y_0$  (верхняя граница  $E$ ) такое, что  $y \leq y_0$  для всех  $y \in E$ . Введем теперь аксиому V.

Аксиома V. Всякое множество  $E$ , ограниченное сверху, имеет точную верхнюю границу, т. е. существует такой элемент  $\sup E$ , который есть верхняя граница  $E$  и такой, что всякий другой элемент, превосходящий все элементы множества  $E$ , превосходит также и  $\sup E$ .

Отсюда легко вывести, что если  $E$  ограничено снизу, то существует точная нижняя граница  $\inf E$ . Если множество не ограничено сверху (или снизу), то будем писать:

$$\sup E = +\infty \quad (\inf E = -\infty).$$

Из аксиомы III следует, что всякое конечное множество ограничено, а потому всегда существует  $\sup(y_1, y_2, \dots, y_n)$  и  $\inf(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Полезно ввести в рассмотрение еще следующие элементы:

$$(y)_+ = \sup(0, y); \quad (y)_- = (-y)_+ = -\inf(0, y); \\ |y| = (y)_+ + (y)_- = \sup(y, -y),$$

здесь  $(y)_+$  — положительная часть  $y$ ,  $(y)_-$  — отрицательная часть  $y$ , при этом  $y = (y)_+ - (y)_-$ ;  $|y|$  — абсолютная величина  $y$ ;  $|y|$  обладает всеми свойствами абсолютной величины, например:

$$|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2|.$$

Введем теперь понятие о пределе.

Положим:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_n [\sup(y_n, y_{n+1}, \dots)]; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup_n [\inf(y_1, y_2, \dots)].$$

В случае, если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , то будем говорить, что существует предел последовательности  $\{y_n\}$ , и записывать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \quad \text{или} \quad y_n \rightarrow y_0.$$

Однако при этих аксиомах можно доказать лишь немногие свойства предела, например:

- 1) если  $y_n \rightarrow y$ ,  $y'_n \rightarrow y'$ , то:  $(y_n + y'_n) \rightarrow y + y'$ ,  
 $\sup(y_n, y'_n) \rightarrow \sup(y, y')$ ;  $|y_n| \rightarrow |y|$ ;
- 2) если  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ,  $y_n \rightarrow y$ , то  $\lambda_n y_n \rightarrow \lambda y$ ;
- 3) если  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |y_n - y_m| = 0$ , то существует такое  $y$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ .

Чтобы установить дальнейшие свойства предела, мы введем еще одну аксиому.

## § 2. Регулярные пространства

Пространство  $Y$  будем называть *регулярным* ( $S_0$ ), если в нем выполнена еще следующая аксиома:

Аксиома VI. Пусть  $E_n$  — последовательность таких множеств, что существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup E_n] = y_0$ , конечный или бесконечный. Тогда существуют всегда конечные подмножества  $E'_n \subset E_n$  такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup E'_n] = y_0$ ; если же для всех  $n$   $\sup E_n = +\infty$ , то существует такое  $E'_n$ , что  $\sup(\sup E_n) = +\infty$ .

Из этой аксиомы имеется весьма большое число следствий, я укажу только некоторые из них:

- 4) если  $y_n \rightarrow 0$ , то существуют  $\lambda_n \rightarrow \infty$  такие, что  $\lambda_n y_n \rightarrow 0$ ;
- 5) если  $y_n \rightarrow y$ , то существует  $y_0$  такое, что  $|y_n - y| < \varepsilon y_0$  при  $n > N\varepsilon$ , каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ ;
- 6) каково бы ни было множество  $E$ , существует такое исчислимое множество  $E'$ , что  $\sup E' = \sup E$ ,  $\inf E' = \inf E$ ;

- 7) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_n^{(k)} = y_n$ , то имеется такая последовательность  $k_n$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(k_n)} = y$ ;
- 8) если последовательность  $y_n$  такова, что при всяких  $\lambda_n \rightarrow 0$  будет  $\lambda_n y_n \rightarrow 0$ , то она ограничена;
- 9) если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$  сходится, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ;
- 10) если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  сходится, то можно указать множители  $\lambda_n \rightarrow \infty$  и такие, что сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ .

### § 3. Топологическая сходимость

Наряду с рассмотренным в § 2 определением сходимости  $y_n \rightarrow y$  введем другое, связанное с ним. Будем писать  $y_n \rightarrow y(*)$  [«последовательность  $y_n(*)$ -сходится к  $y$ »], если из всякой частичной последовательности  $y_{n_k}$  можно выбрать такую подпоследовательность  $y_{n_{k_i}}$ , что  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{n_{k_i}} = y$ .

Для отличия прежде определенную сходимостъ будем называть иногда (о)-сходимостью и писать  $y_n \rightarrow y(o)$ .

К  $(*)$ -сходимости можно притти и иначе. Если мы для любого множества  $E \subset Y$  определим замыкание его  $\bar{E}$  как сумму множества  $E$  и его предельных точек, т. е. точек вида  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ,  $y_n \in E$ , то множество  $Y$  сможем рассматривать как топологическое пространство. При этом  $(\bar{E}) = \bar{E}$  благодаря следствию 7 аксиомы VI. В пространстве  $Y$  будут определены благодаря этому: замкнутые множества, открытые множества, окрестности. Раз в  $Y$  будут определены окрестности, то через них может быть определено новое понятие сходимости—топологическая сходимостъ:  $y_n \rightarrow y(t)$ . Можно показать, что эта сходимостъ совпадает с определенной выше  $(*)$ -сходимостью, т. е. что  $y_n \rightarrow y(t)$  равносильно тому, что  $y_n \rightarrow y(*)$ .

### § 4. Нормируемые пространства

Линейное множество  $Y$  называется нормированным пространством (Banach), если каждому его элементу  $y$  отвечает не отрицательное вещественное число  $\|y\|$ , причем выполнены условия: 1)  $\|y\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = 0$ , 2)  $\|\lambda y\| = |\lambda| \cdot \|y\|$ , 3)  $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$ .

Предположим теперь, что  $Y$  есть одновременно нормированное пространство и линейное полуупорядоченное пространство  $(S_5)$  и притом такое, что выполнены условия:

$$1) \|y_1\| < \|y_2\|, \text{ если } |y_1| < |y_2|,$$

- 2)  $\|y_n\| \rightarrow 0$ , если  $y_n \rightarrow 0$  убывая,  
 3)  $\|y_n\| \rightarrow \infty$ , если  $y_n \rightarrow +\infty$  возрастаая.

Тогда можно показать, что в  $Y$  будет выполнена и аксиома VI и что  $Y$  есть полное пространство по отношению к сходимости по норме, т. е. пространство типа В. Наконец, топологическая сходимость в  $Y$  совпадает со сходимостью по норме, т. е.  $y_n \rightarrow y(t)$  эквивалентно тому, что  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ . Такое пространство мы будем называть пространством типа  $B_2$ . Заметим, что если в таком пространстве ввести еще норму группы элементов<sup>1</sup>, полагая

$$\|y_1, y_2, \dots, y_n\| = \|\sup(|y_1|, \dots, |y_n|)\|,$$

то условие (о)-сходимости последовательности элементов  $y_n$  к элементу  $y$  состоит в том, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y_n - y, \dots, y_m - y\| = 0.$$

### § 5. Частные виды пространства

А. Конечно-мерное координатное пространство. Рассмотрим пространство  $R^{(k)}$ , элементы которого определены вещественными числами—координатами (или составляющими)

$$y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}).$$

Сложение и умножение на вещественное число определяются обычным образом (как для векторов). Далее будем считать элемент положительным  $y > 0$ , если все координаты не отрицательны  $y^{(i)} \geq 0$  и хотя бы одна из них не нуль. Тогда  $R^{(k)}$  представляет полуупорядоченное пространство; как легко проверить, все аксиомы I—VI здесь соблюдены. В частности, в данном случае  $\sup(y_1, y_2)$  обозначает элемент, все координаты которого равны максимумам соответственных координат элементов  $y_1$  и  $y_2$ ;  $|y|$  будет элемент, координаты которого равны абсолютным величинам координат элемента  $y$ :

$$|y| = (|y^{(1)}|, \dots, |y^{(k)}|).$$

Сходимость последовательности элементов  $y_n \rightarrow y$  совпадает здесь с (\*)-сходимостью и состоит в том, что все координаты точки  $y_n$  стремятся к соответственным координатам точки  $y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(i)} = y^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Пространство это есть пространство типа  $B_2$ , достаточно принять за  $\|y\|$  число:  $\|y\| = [|y^{(1)}|^p + \dots + |y^{(k)}|^p]^{\frac{1}{p}}$  ( $p \geq 1$  любое). При  $k=1$   $R^{(1)}$  есть пространство действительных чисел.

<sup>1</sup> Пространства, в которых определена норма группы элементов, были изучены в последнее время молодым ленинградским математиком Б. З. Вулихом (см. литературу).

В. Бесконечно-мерное координатное пространство (пространство последовательностей). Рассмотрим пространство  $l^p$  ( $p \geq 1$ ), элементами которого служат бесконечные последовательности вещественных чисел

$$y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots)$$

такого рода, что ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |y^{(i)}|^p$  сходится. Будем считать  $y > 0$ , если все  $y^{(i)} \geq 0$  и хотя одно из них не нуль.  $l^{(p)}$  представляет тогда регулярное полупорядоченное пространство. Сходимость элементов в нем обозначает, что сходятся все их координаты и притом все они ограничены координатами некоторого одного элемента. Точнее говоря,  $y_n \rightarrow y$  означает, что  $y_n^{(i)} \rightarrow y^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и существует такой элемент  $y_0 = (y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots)$ , что  $|y_n^{(i)}| \leq y_0^{(i)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) при всех  $i$ .

Если положим  $\|y\| = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |y^{(i)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ , то  $l^{(p)}$  будет представлять пространство типа  $B_2$ , (\*)-сходимость в нем следовательно представляет сходимость по такой норме.

Укажем еще на пространство  $s$  всех последовательностей  $(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots)$ ; оно также будет удовлетворять всем аксиомам I—VI, но уже не будет пространством типа  $B_2$ . В нем (o)-сходимость и (\*)-сходимость совпадают и состоят в сходимости всех координат.

С. Пространства, составленные из измеримых функций. Рассмотрим произвольное множество  $\Phi = \{ \varphi \}$ , составленное из измеримых [функций  $\varphi(t)$ , определенных в промежутке  $(a, b)$ , и такое, что удовлетворены условия:

- 1) если  $\varphi_1 \in \Phi$ ,  $\varphi_2 \in \Phi$ , то  $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi$ ;
- 2) если  $|\varphi(t)| \leq |\varphi_1(t)|$  и  $\varphi_1 \in \Phi$ , то  $\varphi \in \Phi$ .

Если считать  $\varphi > 0$ , когда  $\varphi(t) \geq 0$  почти везде и  $\varphi(t) > 0$  на совокупности положительной меры, то множество  $\Phi$  представляет полупорядоченное пространство, удовлетворяющее аксиомам I—V; аксиомы I—IV проверяются без труда; проверка того, что выполнена и аксиома V, требует специального рассуждения.

Сходимость в пространстве  $\Phi$  состоит в следующем. Последовательность элементов  $\varphi_n$  сходится к  $\varphi$ :  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  означает, что функции  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  почти везде и притом все они ограничены одной функцией из семейства  $\Phi$ . В частности, пространство  $S$  всех почти везде конечных измеримых функций представляет такое множество. В этом случае будет выполнена и аксиома VI. Сходимость в  $S$  есть сходимость почти везде; (\*)-сходимость здесь—сходимость по мере. Множество всех ограниченных измеримых функций также может быть принято за семейство  $Y$ , но здесь аксиома VI не удовлетворена. Наконец, множество  $L^p$  всех функций, суммируемых со степенью  $p$  ( $p \geq 1$ ), также может быть принято за семейство  $\Phi$ .



Это есть пространство типа  $B_2$ , если принять  $\|\varphi\| = \left\{ \int_a^b \varphi(t)^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$ .

Сходимость в нем состоит в сходимости последовательности почти везде и ограниченности ее одной функцией, суммируемой в степени  $p$ . Топологическая сходимость здесь есть сходимость в среднем с показателем  $p$ .

Укажем один пример применения общей теории полуупорядоченных пространств. На основании следствия 5 из аксиомы VI заключаем, применяя его к пространству  $S$ , что если последовательность измеримых функций  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  почти везде, то имеется такая измеримая почти везде конечная функция  $\varphi_0(t)$ , что  $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \varphi_0(t)$  при  $n \geq N_\varepsilon$ . Если через  $E'$  обозначить совокупность точек, где  $|\varphi_0(t)| \leq M$ , то ясно, что на  $E'$  сходимость  $\varphi_n(t)$  к  $\varphi(t)$  будет равномерной. Это дает сразу известную теорему Егорова о последовательности измеримых функций.

Д. Пространство функций ограниченной вариации. Рассмотрим пространство  $V = \{\psi\}$ , составленное из функций ограниченной вариации  $\psi(t)$ , определенных в промежутке  $(a, b)$ . Сложение и умножение на константу определяем как обычно. Будем считать  $\psi > 0$ , если  $\psi(a) \geq 0$ , функция  $\psi(t)$  не убывает:  $\Delta\psi(t) \geq 0$  и, наконец,  $\psi(t)$  не равна нулю тождественно. Тогда  $V$  будет полуупорядоченным пространством. Проверим аксиому  $V$ .

Пусть  $E \subset V$  есть некоторое множество, ограниченное сверху элементом  $\psi_0$ . Рассмотрим следующую функцию

$$\psi^*(t) = \sup_{\psi \in E} \psi(a) + \sup_{\substack{a=t_1 < \dots < t_{n+1}=b \\ \psi_1, \dots, \psi_n \in E}} \sum_{i=0}^n [\psi_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)],$$

где во втором случае supremum взят относительно всех способов разбиения промежутка  $(a, b)$  на части и всех способов выбора функций  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  из  $E$ . Функция  $\psi^*(t)$  будет функция ограниченной вариации; далее легко видеть, что  $\psi^* \geq \psi$  для  $\psi \in E$  и  $\psi^* \leq \psi_0$ . Это и показывает, что  $\sup E = \psi^*$ . В данном случае, как легко убедиться,  $|\psi|$  есть вариация  $\psi(t)$ , точнее это есть функция  $|\psi(a)| + \text{Var}_a^t \psi(t)$ ;  $\psi_+$  есть таким образом положительная вариация.

Если ввести  $\|\psi\|$ , положив  $\|\psi\| = |\psi(a)| + \text{Var}_a^b \psi(t)$ , то  $V$  можно рассматривать как пространство типа  $B_2$ .

Рассмотрим в частности подмножество  $A$  абсолютно непрерывных функций  $\psi(t)$ , удовлетворяющих условию  $\psi(a) = 0$ . Это множество изоморфно пространству суммируемых функций. Действительно, если  $\varphi \in L^1$ , то ей можно соотнести  $\psi(t) = \int_a^t \varphi(t) dt$ , тогда  $\psi \in A$ . Из

этого изоморфизма следует, что для того, чтобы последовательность абсолютно непрерывных функций  $\phi_n(t)$  сходилась к  $\phi(t)$  так, чтобы производные их  $\phi'_n(t)$  (о)-сходились к  $\phi'(t)$  в пространстве  $L^1$ , необходимо и достаточно, чтобы функции  $\phi_n$  (о)-сходились в пространстве  $A$ . Отсюда нетрудно получить, что даже если  $\phi_n$  — функции ограниченной вариации, но они (о)-сходятся в пространстве  $V$ , то  $\phi'_n(t)$  будут (о)-сходиться к  $\phi'(t)$  в пространстве  $L^1$ . Таким образом получаются весьма общие условия для возможности дифференцирования почти везде последовательности функций ограниченной вариации.

## II. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ

### § 6. Основные классы линейных операций

Пусть  $X$  и  $Y$  два регулярных линейных полуупорядоченных пространства. Будем рассматривать операции, переводящие одно пространство в другое  $y = U(x)$ . При этом мы будем всегда предполагать, что эти операции аддитивны и однородны, т. е.  $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$  и  $U(\lambda x) = \lambda U(x)$ . Для того чтобы операция была линейной, нужно еще предположить, что она непрерывна. Однако, в виду существования различных возможных способов определения сходимости в пространствах  $X$  и  $Y$ , имеются три вида линейных операций:

I. Сильно-непрерывной будем называть операцию в том случае, если  $x_n \rightarrow x(t)$  влечет за собой  $U(x_n) \rightarrow U(x)(o)$ . В таком случае будем говорить еще, что операция принадлежит классу  $H^o_i$ .

II. (В)-непрерывной операцией будем называть такую операцию, что  $x_n \rightarrow x(t)$  влечет  $U(x_n) \rightarrow U(x)(t)$ . Класс таких операций обозначим  $H^t_i$ .

III. Регулярной операцией будем называть такую операцию, что при  $x_n \rightarrow x(o)$  будет  $U(x_n) \rightarrow U(x)(o)$ . Класс этих операций обозначим  $H^o_0$ .

В некоторых случаях мы не имеем трех различных классов, например, если в пространстве  $Y$  (о)-сходимость и (t)-сходимость совпадают, то совпадают все классы  $H^o_i = H^t_i = H^o_0$ . Если пространства  $X$  и  $Y$  типа  $B_2$  и в  $X$  выполнено условие:  $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$  при  $x_1$  и  $x_2 \geq 0$ , то классы  $H^t_i$  и  $H^o_0$  совпадают. Вообще же будет:  $H^t_i \subset H^o_0 \subset H^o_i$ .

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых свойств этих операций. При этом будем предполагать, что  $X$  и  $Y$  пространства типа  $B_2$ <sup>1</sup>.

I. Сильно-непрерывные операции. Легко установить, что значения такой операции на сфере  $\|x\| = 1$  ограничены. Введем элемент пространства  $Y$ , равный supremum'у значений  $U(x)$  на этой сфере, который уместно обозначить  $\|U\|$ :

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} U(x).$$

<sup>1</sup> Это условие может быть заменено различными другими более слабыми.

Тогда для всякого  $x$  имеем неравенство  $|U(x)| \leq \|U\| \cdot \|x\|$ .  
Наоборот, конечность нормы  $U(x)$  достаточна для того, чтобы операция  $U$  была сильно-непрерывной.

Для сильно-непрерывных операций можно установить весьма важную теорему о продолжимости операций. Именно, если такая операция определена на некотором линейном подмножестве пространства  $X$ , то она может быть распространена на все пространство с сохранением нормы. Эта теорема для случая функционалов была установлена раньше и принадлежит Hahn'у и Banach'у. Она играет чрезвычайно важную роль в теории линейных операций Banach'a. Благодаря тому что она справедлива для сильно-непрерывных операций, значительная часть теории Banach'a допускает широкое обобщение: всюду вместо функционалов можно ввести произвольные сильно-непрерывные операции.

II. (B)-н е п р е р ы в н ы е о п е р а ц и и. Этот класс операций был подробно изучен в книге Banach'a<sup>1</sup>. Такая операция характеризуется тем, что она имеет конечную численную норму. Именно, если положить

$$\|U\|'_t = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|,$$

то  $\|U\|'_t$  представляет всегда конечное число и при любом  $x$  будем иметь:

$$\|U(x)\| \leq \|U\|'_t \|x\|.$$

III. Р е г у л я р н ы е о п е р а ц и и. Операцию  $y = U(x)$  назовем положительной  $U > 0$ , если при  $x \geq 0$  будет  $U(x) \geq 0$ , и притом  $U(x) \neq 0$ . Если  $U_2 - U_1 \geq 0$ , будем писать, что  $U_2 \geq U_1$ . Можно доказать, что всякая положительная операция, а также всякая операция, которая не превосходит некоторой положительной, принадлежит классу  $H_0^0$ , т. е. регулярна. Наоборот, всякая регулярная операция будет положительной или ее превосходит некоторая положительная операция. Для установления этого достаточно рассмотреть операцию  $U_1(x)$ , определенную при  $x \geq 0$  так:

$$U_1(x) = \sup_{|x'| \leq 1} |U(x')|.$$

На основании этих соображений можно установить, что регулярные операции, переводящие пространство  $X$  в  $Y$ , образуют сами линейное полуупорядоченное пространство, аксиомы I—V будут выполнены всегда, аксиома же VI—при известных условиях. Поэтому всякая регулярная операция минимальным образом представляется как разность двух положительных  $U = (U)_+ - (U)_-$  и для нее существует операция  $|U|$ . Полезно иногда вводить норму операции  $U: \|U\|_0$ ; в качестве нее мы возьмем норму прежнего вида для операции  $|U|$ , т. е.  $\|U\|_0 = \||U|\|'_t$ . Для положительной операции обе нормы  $\|U\|_0$  и  $\|U\|'_t$  совпадают.

<sup>1</sup> Два других класса операций  $H_0^1$  и  $H_0^2$  с другой точки зрения, чем в моих работах, рассматривались Б. З. Вулихом.

Класс регулярных операций, если его определять как класс операций мажорируемых положительными, является, в некотором смысле, наиболее простым и естественным для рассмотрения классов операций, переводящих пространство  $X$  в  $Y$ . Именно для определения этого класса операций не требуется даже существования понятия предела в множестве  $X$ : достаточно, чтобы в нем выполнялись аксиомы I—IV и аксиома V лишь для множества  $E$ , состоящего из конечного числа элементов.

В следующих параграфах мы рассмотрим частные виды линейных операций, именно операции, переводящие некоторые классические пространства в произвольное пространство типа  $B_2$ . Этим операциям удастся дать аналитическое выражение в форме рядов или в интегральной форме. В последнем случае приходится вводить некоторые классы абстрактных функций и определять для них понятие интеграла. Заметим, что интегрирование функций с значениями в пространстве Banach'a рассматривалось Graves, Bochner, G. Birkhoff и др., а в диссертации И. М. Гельфанда оно было использовано для построения общих видов некоторых операций.

## § 7. Частные виды сильно-непрерывных операций. Некоторые классы абстрактных функций

Пусть  $X = R^{(k)}$ . Общий вид операции, переводящей пространство  $X$  в  $Y$ , будет:

$$y = U(x) = y_1 x^{(1)} + y_2 x^{(2)} + \dots + y_k x^{(k)},$$

где  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$  — координаты точки  $x$ , а  $y_1, y_2, \dots, y_k$  — некоторые постоянные элементы  $Y$ . При этом норма операции, различная в зависимости от способа нормирования  $X$ , есть следующий элемент  $Y$ :

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} (y_1 x^{(1)} + y_2 x^{(2)} + \dots + y_k x^{(k)}).$$

Здесь  $\|x\| = (|x^{(1)}|^p + \dots + |x^{(k)}|^p)^{\frac{1}{p}}$ . В том случае, когда  $Y$  есть пространство вещественных чисел, то, как легко проверить,  $\|U\| = [|y_1|^q + \dots + |y_k|^q]^{\frac{1}{q}}$ , где  $q$  — сопряженный показатель;  $q = \frac{p}{p-1}$ . Поэтому мы этот элемент  $\|U\|$  обозначим  $m_q(y_1, y_2, \dots, y_k)$ , — он в дальнейшем будет играть важную роль, заменяя для элементов  $y_1, y_2, \dots, y_k$

среднее  $(|y_1|^q + \dots + |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ , которое непосредственно, конечно, составлено быть не могло. Этим же обозначением  $m_q(y_1, y_2, \dots, y_n)$  мы будем пользоваться для краткости также при  $y_i$  вещественных.

Будем рассматривать бесконечные последовательности  $y_1, y_2, \dots$ ; относительно такой последовательности будем говорить, что она принадлежит классу  $l^q$ , если растущие с увеличением  $k$  элементы  $m_q(y_1, y_2, \dots, y_k)$  имеют конечный предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_q(y_1, y_2, \dots, y_k) = m_q(y_1, y_2, \dots) < +\infty.$$



Тогда, если точка  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$  принадлежит пространству  $l^p$  (ряд  $\sum_i |x^{(i)}|^p$  сходится), а последовательность  $y_1, y_2, \dots$  принадлежит

классу  $l^q$  ( $q = \frac{p}{p-1}$ ), то ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)} y_i$  сходится и представляет сильно-непрерывную операцию, переводящую  $l^p$  в  $Y$ . При различных  $\{y_i\}$  это дает общий вид такой операции.

Будем рассматривать теперь абстрактные функции  $y = F(t)$ , определенные в промежутке  $(a, b)$ , значения которых принадлежат пространству  $Y$ . Естественным образом можно определить классы: непрерывных, абсолютно-непрерывных функций (A), функций ограниченной вариации (V), функций, удовлетворяющих условию Липшица. Большинство свойств вещественных функций сохраняется; например, функция ограниченной вариации есть разность двух монотонных—она имеет исчислимое множество скачков.

Однако даже функция, удовлетворяющая условию Липшица, может быть нигде не дифференцируема.

Понятие суммируемой функции, хотя и может быть введено, но оказывается не вполне удобным, поэтому мы вместо них будем пользоваться абсолютно-непрерывными функциями. Также вместо функций, суммируемых в степени  $p$ , мы введем некоторый класс абсолютно-непрерывных функций. Здесь исходным будет служить установленный Riesz'ом факт, что функция  $F(t)$  служит неопределенным интегралом некоторой функции класса  $L^p$  в том и только в том случае, когда при всех разбиениях остаются ограниченными суммы:

$$\sum_{v=1}^{v=n} \frac{|F(t_v) - F(t_{v-1})|^p}{(t_v - t_{v-1})^{p-1}}.$$

Исходя отсюда, введем следующее определение: будем говорить, что функция  $F$  принадлежит классу  $A_q$ , если конечен

$$\sup m_q \left( \frac{|F(t_1) - F(t_0)|}{(t_1 - t_0)^{\frac{q-1}{q}}}, \dots, \frac{|F(t_n) - F(t_{n-1})|}{(t_n - t_{n-1})^{\frac{q-1}{q}}} \right) = M_q(F),$$

где supremum взят относительно всех способов разбиения промежутка на части.

Пусть теперь  $g(t)$  есть некоторая вещественная функция, суммируемая со степенью  $p$ . Обозначим через  $G(t)$  ее неопределенный интеграл. Тогда, если  $y = F(t)$  принадлежит классу  $A_q$ , то можно показать, что существует интеграл типа Hellinger'a:

$$\int_a^b \frac{dG(t) dF(t)}{dt} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\Delta F(t_i) \cdot \Delta G(t_i)}{\Delta t_i}.$$

Мы будем иногда этот интеграл обозначать и так:  $\int_a^b g(t) dF(t)$ , разумея



под этим то же самое. Тогда  $\int_a^b x(t) dF(t)$  представляет сильно-непрерывную операцию, переводящую пространство  $L^p$  в  $Y$ , и дает при различных  $F \in A_q$  все такие операции. Нормой этой операции служит элемент  $M_q(F)$ .

Абсолютно-непрерывные функции класса  $A_2$  в теории абстрактных функций играют ту же роль, что вещественные функции, суммируемые с квадратом<sup>1</sup>.

Рассмотрим для них в частности вопрос о разложении по ортогональным функциям. Пусть  $\{\varphi_0(t)\}$  полная ортогональная и нормированная система вещественных функций класса  $L^2$  в промежутке  $(a, b)$ . Пусть  $F(t)$  абстрактная функция класса  $A_2$ . Коэффициентами Фурье ее назовем элементы  $y_n = \int_a^b \varphi_n(t) dF(t)$ .

Тогда можно доказать, что ряд

$$y_1 \varphi_1(t) + y_2 \varphi_2(t) + \dots$$

сходится в среднем к  $F(t)$ , точнее говоря,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_2[F(t) - \int_a^t (y_1 \varphi_1(t) + \dots + y_n \varphi_n(t)) dt] = 0.$$

При этом элементы  $y_1, y_2, \dots$  образуют последовательность класса  $l^2$  и будет

$$m_2(y_1, y_2, \dots) = M_2(F).$$

Далее, какова бы ни была последовательность элементов  $y_1, y_2, \dots$  класса  $l^2$ , можно указать функцию  $F$  класса  $A_2$ , для которой коэффициенты Фурье равны  $y_1, y_2, \dots$ .

Наконец, если  $g(t)$  вещественная функция класса  $L^2$ , а  $F \in A_2$  и  $\alpha_i$  — коэффициенты Фурье  $g(t)$ , а  $y_i$  — коэффициенты Фурье  $F(t)$ , то имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_a^b g(t) dF(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n.$$

Таким образом все основные теоремы теории ортогональных функций остаются верными и для абстрактных функций. Таким же образом могут быть распространены, повидимому, теория почти-периодических функций Бора и Безиковича и теория интегральных уравнений Шмидта.

<sup>1</sup> Правильнее было бы сказать, что эту роль играют «идеальные» функции  $F'(t)$  — производные функций класса  $A_2$ , не определенные в отдельных точках и для которых может быть указано лишь их среднее значение в любом интервале  $(\alpha, \beta)$ , равное  $\frac{1}{(\beta - \alpha)} [F(\beta) - F(\alpha)]$ .

## § 8. Частные виды (В)-непрерывных операций

Для этих операций можно повторить с соответственными изменениями большую часть того, что было сказано о сильно-непрерывных операциях в § 7. Операция (В)-непрерывная, переводящая пространство  $R^{(k)}$  в  $Y$ , может быть дана также в форме  $y = U(x) = x^{(1)}y_1 + \dots + x^{(k)}y_k$ , только норма операции в данном случае будет:

$$\|U\|^i = \rho_q(y_1, y_2, \dots, y_k) = \sup_{\|x\|=1} \|x^{(1)}y_1 + \dots + x^{(k)}y_k\|.$$

Далее можно рассматривать бесконечные последовательности  $y_1, y_2, \dots$ , для которых  $\rho_q(y_1, y_2, \dots) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_q(y_1, y_2, \dots, y_k)$  конечно. Тогда, если  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$  точка из  $l^q$ , а  $y_1, y_2, \dots$  последовательность указанного вида, то ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)}y_i$  будет  $(t)$ -сходиться. Такой ряд дает

(В)-непрерывную операцию, и при различных последовательностях  $y_1, y_2, \dots$  мы можем получить таким образом все (В)-непрерывные операции, переводящие  $l^p$  в  $Y$ .

Основные классы функций здесь вводятся также с помощью нормы, например функция удовлетворяет условию Липшица, если  $\|F(t_2) - F(t_1)\| \leq k \cdot |t_2 - t_1|$ , где  $k$  — постоянная. Опять будем говорить, что функция принадлежит классу  $A_q^{(B)}$ , если для нее числа

$$\rho_q\left(\frac{F(t_1) - F(t_0)}{(t_1 - t_0)^{\frac{1}{p}}}, \dots, \frac{F(t_n) - F(t_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})^{\frac{1}{p}}}\right)$$

ограничены в совокупности. Обозначим их верхнюю границу через  $M_q^{(B)}$ . Попрежнему, если  $g(t)$  — функция, суммируемая с степенью  $p$ , может

быть определен интеграл  $\int_a^b g(t) dF(t)$ . При различных  $F \in A_q$  этот интеграл дает общую форму (В)-непрерывной операции, переводящей пространство  $L^p$  в  $Y$ .

Сказанное в § 7 об ортогональных разложениях справедливо и здесь. Например, если последовательность  $y_1, y_2, \dots$  такова, что  $\rho_2(y_1, y_2, \dots)$  конечно, то существует функция  $F$  класса  $A_2^{(B)}$ , для которой  $y_1, y_2, \dots$  коэффициенты Фурье.

Укажем некоторые возможные приложения рассмотренных здесь абстрактных интегралов. Пусть  $U$  есть В-непрерывная операция, переводящая пространство  $Y$  в другое пространство  $Z$ :  $z = U(y)$ . Тогда, если  $F(t)$  — функция класса  $A_q^{(B)}$ , то нетрудно показать, что функция  $U[F(t)]$  будет функцией того же класса с значениями в  $Z$ . Нетрудно показать далее, что если  $g(t)$  функция класса  $L^p$ , то операцию  $U$  можно применить под знаком интеграла:

$$U \int_a^b g(t) dF(t) = \int_a^b g(t) dU(F(t)).$$

В частности, пусть  $Y$  есть пространство, элементы которого суть функции. Тогда переход от данной функции к ее неопределенному интегралу, к определенному интегралу, к производной, к трансформированной по Лапласу и т. д. представляет В-непрерывные (более того, регулярные) операции; поэтому ясно, что из последней общей теоремы могут быть получены многочисленные теоремы о возможности дифференцирования и интегрирования по параметру и многие другие полезные следствия.

Мы не будем говорить подробно об аналогичных построениях для регулярных операций. Скажем только, что здесь может быть повторено дословно все сказанное о (В)-непрерывных. Нужно только вместо  $y$  поставить где следует  $|y|$ . Например общий вид регулярной операции, переводящей  $l^p$  в  $Y$ , дается и здесь рядом  $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)} y_i$ ; только последовательность  $y_1, y_2, \dots$  должна быть такой, что  $\rho_q(|y_1|, |y_2|, \dots)$  конечно.

### § 9. Об одном классе функциональных уравнений

Теория полуупорядоченных пространств может быть многообразно использована в теории функциональных уравнений. Здесь я рассмотрю лишь один весьма простой класс функциональных уравнений, именно уравнения, для которых применим метод последовательных приближений.

Пусть  $Y$  полуупорядоченное пространство и  $f(y)$  регулярная операция, переводящая  $Y$  в себя. Рассмотрим уравнение  $y = f(y) + y_0$ . Мажорантным для него назовем такое уравнение  $y = f^*(y) + y_0^*$ , что  $|f| \leq f^*$  и  $|y_0| \leq y_0^*$ . Тогда можем утверждать, что если мажорантное уравнение имеет положительное решение  $y^* \geq 0$ , то данное уравнение имеет решение, и притом такое, что  $|y| \leq y^*$ . Действительно, определим рекуррентно  $y_n^*$  и  $y_n$ , полагая  $y_n^* = f^*(y_{n-1}^*) + y_0^*$ ;  $y_n = f(y_{n-1}) + y_0$ .

Легко видеть, что  $y_n^*$  возрастают и  $y_n^* \leq y^*$ . Далее ясно, что  $|y_n| \leq y_n^*$ . Поэтому ряд  $y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots = y$  сходится. Легко видеть, что  $y$  и есть решение уравнения  $y = f(y) + y_0$ . Далее, если положить  $\bar{y}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^*$ , то будет  $|y| \leq \bar{y}^*$ , и можно утверждать, что  $y$  есть единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее этому условию. Наконец, заметим, что такого же рода теорема может быть высказана и также просто доказана для случая, когда  $f$  нелинейная операция.

Применение этих простых теорем дает сразу требуемый результат в ряде вопросов анализа, в которых применяется обычно метод последовательных приближений. Укажем только: уравнения Вольтерра, альтернирующий метод Шварца, некоторые теоремы о нелинейных интегральных уравнениях, теорему существования в аналитической теории

дифференциальных уравнений, ряд теорем о бесконечных системах уравнений.

По поводу бесконечных систем заметим, что тут могут быть получены теоремы Pellet, Б. М. Кояловича, Р. О. Кузьмина и автора. Эти общие теоремы дают иногда более полный результат, чем непосредственное применение метода.

### III. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

#### § 10. Полуупорядоченные пространства общего вида. Верхний и нижний предел

Мы рассмотрим здесь случай, когда пространство  $Y$  не является линейным. Будем предполагать, что для некоторых пар различных элементов пространства  $Y = \{y\}$  определено отношение  $y_1 < y_2$ . Предполагаем следующие аксиомы:

1° если  $y_1 < y_2$  и  $y_2 < y_3$ , то  $y_1 < y_3$ ;

2° для всяких  $y_1, y_2$  найдутся  $y_3$  и  $y_4$  такие, что  $y_3 \leq y_1, y_2 \leq y_4$ ;

3° для всякого ограниченного сверху множества существует  $\sup E$ , для ограниченного снизу  $\inf E$ ;

4° аксиома регулярности, в том же виде, как аксиома VI в § 2.

Последняя аксиома нужна не всегда. В ряде случаев, наоборот, нужны и некоторые дополнительные аксиомы.

Понятие предела может быть определено, как в § 1. Можно ввести понятие о  $(*)$ -сходимости, которая совпадает здесь с топологической сходимостью. Далее, если пространство одновременно метрическое, то при некоторых простых условиях сходимость по расстоянию будет совпадать с  $(*)$ -сходимостью.

В пространстве  $Y$  можно ввести понятие предела еще двумя другими способами. Именно, если совпадают для всех последовательностей  $n_1, n_2, \dots$  пределы  $\varinjlim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$ , то их общее значение назовем верхним пределом и будем обозначать  $(h) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Если при любых последовательностях совпадают наименьшие пределы  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$ , то их общее значение назовем нижним пределом  $(b) \lim_{h \rightarrow \infty} y_n$ . Введение таких пределов может превратить данное множество, вообще говоря, в другое топологическое пространство. Можно установить некоторые общие теоремы о таком образом топологизированных полуупорядоченных пространствах, на чем я здесь не останавливаюсь. Укажу только два интересных примера таких пространств.

Рассмотрим, во-первых, множество замкнутых подмножеств промежутка  $(a, b)$ . Если ввести полуупорядочение, полагая  $F_1 < F_2$  (если множество  $F_1 \subset F_2$  в узком смысле), то  $\mathfrak{F} = \{F\}$  представляет множество, удовлетворяющее аксиомам 1°—3°. Если в множестве  $F$  ввести верхний



предел  $(h) \lim_{h \rightarrow \infty} F_n$ , то, как легко установить, он совпадает с топологическим пределом последовательности замкнутых множеств, который был изучен Hausdorff'ом.

В качестве второго примера рассмотрим множество полунепрерывных сверху функций, определенных в промежутке  $(a, b)$ . Если ввести полуупорядочение, считая  $\varphi_1 > \varphi_2$ , при условии, что функция  $\varphi_1(t) \geq \varphi_2(t)$  при всех  $t$  и хотя бы при одном  $t$   $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ , то  $\Phi = \{\varphi\}$  будет представлять пространство, удовлетворяющее аксиомам 1°—3°. Если в  $\Phi$  ввести верхний предел  $(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ , то получим пространство, по своим свойствам весьма похожее на пространство замкнутых множеств Hausdorff'a.

Заметим, наконец, еще, что в виду того что положительные элементы линейного полуупорядоченного пространства аналогичны положительным числам, они могут быть употреблены вместо последних при нормировании или метризации пространств, т. е. можно рассматривать, например, метрические пространства, в которых расстояние  $\rho(x_1, x_2)$  есть элемент некоторого полуупорядоченного линейного пространства  $Y$ . Такое рассмотрение может оказаться полезным благодаря тому, что некоторые сходимости, которые не могут быть представлены с помощью известных в функциональном анализе сходимостей, даже основанных на привлечении полуупорядоченных пространств, могут быть иногда получены как сходимости по такому обобщенному расстоянию.

В качестве примера рассмотрим множество непрерывных функций  $x(t)$ . Для сходимости последовательности потребуем сходимость везде, при дополнительном условии, что функции равномерно непрерывны. Если за  $\|x\|$  принять элемент пространства  $V$  монотонных функций  $\omega(\delta) = \sup_{t'-t \leq \delta} |x(t') - x(t)|$ , то сходимость по такой норме, т. е. то, что  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  в  $V$ , и будет интересующая нас сходимость. Аналогичного рода пространство можно построить для абсолютно-непрерывных функций.

## § 11. Дополнение полуупорядоченного пространства. Декартово произведение

Мы предполагали в предыдущем параграфе, что для пространства выполнены три аксиомы. Однако, если известно, что выполнены лишь аксиомы 1° и 2°, то выполнения аксиомы 3° можно добиться путем дополнения множества  $Y$  новыми элементами. Для установления этого достаточно в  $Y$  рассмотреть пары классов  $(A, B)$  типа Дедекиндовых ( $A$  состоит из всех элементов меньших, чем все элементы из  $B$ , и наоборот,  $B$  состоит из всех элементов больших, чем все элементы из  $A$ ). Тогда если пара классов не определяется никаким элементом из  $Y$ , то можно считать, что ей соответствует новый элемент. Такое дополнение является в некотором смысле минимальным, т. е. пространство, полученное таким способом, будет по отношению ко всякому иному



дополненному пространству представлять своеобразную фактор-группу. Можно, далее, установить, что пространство может быть дополнено таким образом, что оно превратится в линейное и будут соблюдены аксиомы I—V (§ 1). Можно при этом добиться того, что для пары элементов  $y_1$  и  $y_2$ , для которой  $\inf(y_1, y_2) = 0$ , будет  $y_1 + y_2 = \sup(y_1, y_2)$  (предполагаем, что  $y > 0$  для всех  $y \in Y$ , т. е. 0 наименьший элемент).

Если имеется некоторое множество полуупорядоченных пространств (линейных или нет)  $\{Y_\xi\}$  ( $\xi \in \Xi$ ), то можно построить их Декартово произведение  $Y = \prod_{\xi \in \Xi} Y_\xi$ , составляя его из точек  $y = \{y_\xi\}$  ( $y_\xi \in Y_\xi$ ). При этом считаем

$y_1 > y_2$ , если  $y_1^\xi \geq y_2^\xi$  для всех  $\xi \in \Xi$  и при некотором  $\xi$ :  $y_1^\xi > y_2^\xi$ . Легко установить, что если  $Y_\xi$  удовлетворяют аксиомам 1°—3° § 10 (или I—V § 1), то и  $Y$  удовлетворяет тем же аксиомам. То же самое можно утверждать, если брать Декартово произведение с точностью до нуль-множеств. Именно некоторые подмножества  $\Xi$  считаются нуль-множествами. Две точки  $y_1 = \{y_1^\xi\}$  и  $y_2 = \{y_2^\xi\}$  будем считать за одну, если  $y_1^\xi = y_2^\xi$ , кроме нуль-множества значений  $\xi$ .

В таком случае опять можно доказать (при известных предположениях), что пространство удовлетворяет аксиомам 1°—3° (или I—V). Из этих теорем можно получить, что множество всех функций, множество измеримых функций, множество функций, удовлетворяющих условию Бэра, если считать разнящиеся на совокупности первой категории за одинаковые,—представляют собой полуупорядоченные линейные пространства.

Все пространства, составленные из функций, будут полуупорядоченными. Естественно поставить обратный вопрос: не может ли быть любое линейное полуупорядоченное пространство координатизовано, т. е. не будет ли оно изоморфно множеству функций, определенных на некоторой совокупности? В такой форме этот вопрос был мне предложен А. Н. Колмогоровым. Этот вопрос решается так. Пусть дано линейное полуупорядоченное множество  $Y = \{y\}$  (аксиомы I—IV и V для конечного множества). Рассмотрим множество  $T = \{f\}$  положительных линейных функционалов, определенных на  $Y$ . Тогда каждому элементу  $y \in Y$  будет отвечать следующая функция, определенная в  $T$ :  $\varphi_y(f) = f(y)$ . Множество  $Y$  будет изоморфно с множеством функций  $\{\varphi_y\} = \Phi$ . Точнее говоря, изоморфизм будет по отношению к линейным операциям и знаку  $>$ , однако для операций supremum и infimum изоморфизма уже не будет, т. е. элементу  $\sup(y_1, y_2)$  не будет отвечать функция, равная  $\sup(\varphi_{y_1}(f), \varphi_{y_2}(f))$ . При этом в некоторых случаях изоморфизма в отношении этих операций невозможно добиться ни при каком другом построении множества функций  $\Phi$ .

## § 12. Применения к дескриптивной теории функций

Теория непрерывных функций и функций классификации Бэра может быть построена для случая, когда область значений есть любое топологическое пространство (Kuratowski). Теорию полунепрерывных функций и классов Young'а нельзя, конечно, провести в таких общих предположениях. Однако теорию полунепрерывных функций можно построить в случае, когда область значений есть полуупорядоченное пространство (аксиомы 1°—4° § 10). Тогда при некоторых дополнительных условиях могут быть установлены все основные факты теории полунепрерывных функций, вплоть до теоремы Бэра о том, что всякая полунепрерывная функция есть предел монотонной последовательности непрерывных.

Более интересным представляется другой путь использования полуупорядоченных пространств. Именно с помощью этих пространств можно дать некоторое абстрактное построение дескриптивной теории, включающее в себя основные факты классификации функций, классификации множеств, а также возможных других аналогичных построений.

Пусть  $Y$  есть некоторое полуупорядоченное пространство (аксиомы 1°—3° § 10). Пусть  $K \subset Y$  есть некоторое исходное подмножество  $Y$ . Его удобно предположить инвариантным относительно операций  $\sup(y_1, y_2)$  и  $\inf(y_1, y_2)$ . Рассмотрим элементы из  $Y$  вида  $y = \lim y_n$ ;  $y_n \in K$ . Это будет первый класс над  $K$ , т. е.  $K_1$ . Таким же образом могут быть построены классы  $K_\alpha$  — «классы Бэра». Далее, если  $N$  есть любое множество последовательностей, можно рассмотреть класс элементов, которые можно представить в форме:

$$y = \sup_{(n_1, n_2, \dots) \in N} [\inf(y_{n_1}, y_{n_2}, \dots)].$$

Обозначим этот класс  $H_N(K)$ . Это будет класс, аналогичный классу множеств, которые строятся с помощью  $\delta_s$  операции Hausdorff'a. В частности, тут могут быть получены абстрактные классы Young'а, аналитические множества, проективные множества — над  $K$ .

Научно-исслед. институт математики и механики  
Ленинградского гос. университета  
им. А. С. Бубнова.

### ЛИТЕРАТУРА<sup>1</sup>

- <sup>1</sup> Alexandroff P., Sur les espaces discrets, C. R. **200**, pp. 1649, 1708 (Введ.).
- <sup>2</sup> Banach S., Théorie des opérations linéaires, Varsovie 1932 (§ 5, 6).
- <sup>3</sup> Birkhoff G., On the combination of subalgebras, Proc. Camb. Math. Soc. **29**, 441—464 (1933); **30**, 115—122 (1934); **31**, 453 (1935) (Введ.).
- <sup>4</sup> Birkhoff G., Integration of functions with values in a Banach space, Trans. A. M. S. **38**, 357—378 (1935) (§ 6—8).
- <sup>5</sup> Bochner S., Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math. **20**, 262—276 (1933); F. M. **21**, 211—213 (§ 6—8).
- <sup>6</sup> Вулих Б. Э., Об одном типе метрических пространств, ДАН, **IV**, 295—298 (1935).
- <sup>7</sup> Vulich B., On a generalised notions of convergence in a Banach space, Annals of Math. **38** (печатается).

<sup>1</sup> В скобках указано, в каких параграфах настоящей статьи упоминается данная работа или с содержанием каких параграфов она связана.

- <sup>8</sup> Вулих Б. З., Статья в Матем. сборнике (печатается) (§§ 4, 6, 7, 8).
- <sup>9</sup> Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Math. Ann. **53**, 371—403 (1900) (Введ.).
- <sup>10</sup> Graves L. M., Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis, Trans. A. M. S. **29**, 163—177 (1927) (§ 6).
- <sup>11</sup> Гельфанд И. М., Абстрактные функции и общие виды линейных операций, Дисс., Москва 1935 (рукопись) (§ 6—8).
- <sup>12</sup> Hausdorff F., Mengenlehre, 1927 (§ 10).
- <sup>13</sup> Канторович Л. В., Линейные полуупорядоченные пространства и их применение к теории линейных операций, ДАН **IV**, 11—14 (1935) (§ 1, 2, 5, 6).
- <sup>14</sup> Канторович Л. В., К общей теории линейных операций в полуупорядоченных пространствах, ДАН **I**, 271—274 (1936) (§ 6).
- <sup>15</sup> Канторович Л. В., Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида, ДАН **II**, № 1 (1936) (§ 3, 4, 10, 12).
- <sup>16</sup> Kantorovitch L., Sur un espace des fonctions à variation bornée, C. R. **201**, 1457 (1935) (§ 3, 5).
- <sup>17</sup> Kantorovitch L., Sur les propriétés des espaces semiordonnés linéaires, C. R. **202**, 813 (1936) (§ 1, 2).
- <sup>18</sup> Kantorovitch L., Sur les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semiordonné linéaire arbitraire, C. R. **202**, 1251 (§ 7).
- <sup>19</sup> Канторович Л. В., Основы теории функций вещественного переменного, значения которых принадлежат линейному полуупорядоченному пространству, ДАН (печатается) (§ 7).
- <sup>20</sup> Канторович Л. В., О некоторых классах линейных операций, ДАН (печатается) (§ 6).
- <sup>21</sup> Канторович Л. В., Общие формы некоторых классов линейных операций, ДАН (печатается) (§ 7, 8).
- <sup>22</sup> Kantorovitch L., Lineare halbgeordnete Räume I, Матем. сборник **2(44)** (печатается) (§ 1—5).
- <sup>23</sup> Klein-Barmen Fr., Zur Theorie der abstrakte Verknüpfungen, Math. Ann. **105**, 308—323 (1931); **111**, 596—621 (1935) (Введ.).
- <sup>24</sup> Кузьмин Р. О., Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений, Известия Академии Наук СССР, **4** (1934) (§ 9).
- <sup>25</sup> Kuratowski, Topologie I, Varsovie, 1933 (§ 3, 12).
- <sup>26</sup> Markoff A., Über die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der «Früher als» Beziehung, Phis. Ztschr. d. Sowjetunion, **I**, 387—406 (1932) (Введ.).
- <sup>27</sup> Menger K., Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen, Jahrb. d. Deutsch. Math. Ver. **37**, 309—325 (1928) (Введ.).
- <sup>28</sup> Ore O., On the foundations of abstrakt algebra. I, Annals of Math. **36**, 406—437 (1935) (Введ.).
- <sup>29</sup> Pellet, Bull. Soc. Math. de France, **41**, 119—126 (1913) (§ 9).
- <sup>30</sup> Riesz Fr., Über die Systeme der integralbaren Funktionen, Math. Ann. **69** (1910) (§ 7).
- <sup>31</sup> Stone M. H., Postulates for Boolean algebras and generalized Boolean algebras, Amer. Journ. of Math. **57**, 703—732 (1935) (Введ.).
- <sup>32</sup> Tuecker A. W., Cell spaces, Annals of Math. **37**, 92—101 (1936) (Введ.).
- <sup>33</sup> Шатуновский С., Введение в анализ, Одесса 1923, литограф. изд., Одесса 1907 (Введ.).

## L. KANTOROVITCH. SUR LES ESPACES SEMIORDONNÉS

## RÉSUMÉ

Le présent article contient les résultats d'une série de recherches de l'auteur sur la théorie des espaces semiordonnés. La plupart de ces résultats a été énoncée dans les notes de l'auteur [14—21].

On appelle espace semiordonné linéaire une multiplicatè linéaire  $Y = \zeta$  telle que pour certains couples de ses éléments la relation «plus grand  $>$ » est définie et vérifie les conditions habituelles. On suppose d'ailleurs que chaque ensemble  $E \subset Y$  borné supérieurement admet une borne supérieure exacte  $\sup E$ . Dans un espace pareil on introduit la notion de limite au moyen des notions de limite supérieure et inférieure. Si l'on introduit encore une condition complémentaire du «régularité» de l'espace, on voit que presque tous les théorèmes sur les limites ayant lieu pour les nombres réels subsistent dans le cas considéré. La différence essentielle consiste en ce que pour ces espaces on a non seulement la convergence ordinaire, mais encore une notion plus générale de convergence (\*)—la convergence topologique.

On peut extraire de chaque suite convergente (\*) une suite partielle qui converge au sens ordinaire. D'ailleurs si l'espace est normé et quelques conditions complémentaires sont vérifiées, la convergence (\*) coïncide avec la convergence en norme. Comme exemples d'espaces de cette nature on peut indiquer celui de l'espace des fonctions mesurables, l'espace des suites infinies, l'espace des fonctions à variation bornée. Dans le premier cas la convergence ordinaire est la convergence presque partout, la convergence (\*) est la convergence en mesure.

La seconde partie de l'article est consacrée à la théorie des opérations dans les espaces semiordonnés. On considère les opérations linéaires  $y = U(x)$  qui transforment l'espace semiordonné  $X$  en un autre espace de même nature  $Y$ . La continuité de l'opération peut être définie de différentes manières. Si la relation  $x_n \rightarrow x(t)$  entraîne toujours  $u(x_n) \rightarrow u(x)$  (0) nous dirons que l'opération  $U$  appartient à la classe  $H_0^1$ . On définit d'une manière analogue les autres classes, d'ailleurs  $H_0^1 = H_1^1 \supset H_0^0 \supset H_1^0$ .

On peut considérer ensuite des fonctions abstraites d'une variable réelle  $y(t)$ , dont les valeurs appartiennent à un espace semicontinu. Pour ces fonctions plusieurs théorèmes sur les fonctions à valeurs réelles restent valables. En particulier, on peut à l'aide de ces fonctions obtenir sous forme d'intégrales abstraites les formes générales des opérations de classes différentes transformant des espaces fonctionnels déterminés en un espace semiordonné arbitraire.

Dans la troisième partie on considère des espaces semiordonnés qu'on ne suppose plus linéaires. On considère les diverses définitions possibles de limite dans un pareil espace, la possibilité de compléter l'espace, d'y introduire des coordonnées. On établit les relations entre la théorie des espaces pareils et certaines questions de la théorie des fonctions descriptive.



С. Б. БЕРГМАН

# О НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДАХ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ <sup>1</sup>

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые методы для эффективного конформного отображения, связанные с формулой Шварца-Кристоффеля и теорией ортогональных функций.

Одна из главных задач эффективных методов конформного отображения состоит в том, чтобы для системы точек или линий, заданных в области  $\mathfrak{B}$ , найти соответствующую ей при конформном отображении систему точек или линий в другой области  $\mathfrak{B}^*$ .

Вышеуказанная проблема распадается на две задачи:

I. Если заданы области  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{B}^*$ , найти функцию, отображающую одну область на другую.

II. После того как искомая функция определена, указать метод, позволяющий при наименьшей затрате вычислительной работы найти в области  $\mathfrak{B}^*$  образы системы точек или линий, заданных в  $\mathfrak{B}$ .

Я хотел бы в дальнейшем указать два метода для решения этих задач, из которых первый относится только к полигональным областям:

## § 1

Интеграл Шварца-Кристоффеля

$$z(w) = \int_0^w \prod_{\mu} (w - w_{\mu})^{\nu_{\mu}} dw \quad (1,1)$$

отображает полуплоскость  $\xi$  плоскости  $w$  на полигональную область  $\mathfrak{B}$  плоскости  $z$ , причем  $\nu_{\mu}$ —внешние углы полигональной области, а  $w_{\mu}$ —точки действительной оси, соответствующие угловым точкам области  $\mathfrak{B}$ . В соответствии с вышесказанным первая наша задача состоит в том, чтобы найти при заданной  $\mathfrak{B}$  значения  $w_{\mu}$ , а затем, возникает конечно вопрос, указанный в п. II. При этом особенно важно решение указанной задачи для известных классов областей; можно поэтому сначала ограничиться некоторыми частными случаями многоугольников, для которых число и величина углов одинаковы и только

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.



длины сторон меняются, например для прямоугольников, угловых областей (см. ниже фиг. 1), Т-областей, трапеций и т. д.

Очевидно, что при применениях на практике можно полагать, что  $\nu_\mu$  — рациональные числа. Тогда  $(1, 1)$  есть интеграл алгебраической функции; длины сторон области  $\mathfrak{F}$  являются модулями периодичности этого интеграла, и легко доказать, что, изменяя длины сторон  $\mathfrak{F}$  на соответствующим образом выбранные величины  $\varepsilon_\mu$ , по абсолютной величине меньшие, чем любое заданное  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), можно получить область  $\mathfrak{G}$ , которая получается из  $\mathfrak{F}$  при помощи сводимого интеграла  $(1, 1)$ . (Сводимыми интегралами называются интегралы, которые при помощи алгебраической трансформации  $\xi = R(\omega)$  переходят в один или сумму нескольких эллиптических интегралов. Области, получаемые из  $\mathfrak{G}$  при помощи таких интегралов, мы будем в будущем всегда обозначать буквой  $\mathfrak{R}$ . Однако условие сводимости интеграла, позволяющее найти указанную трансформацию, обыкновенно бывает дано как известное алгебраическое уравнение  $\Lambda$  между  $\omega_\mu$  — точками разветвления интеграла, которые как раз требуется определить.)

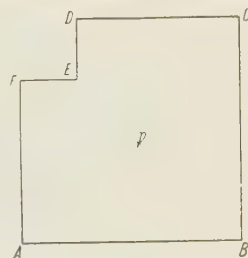
Основная идея нашего метода состоит в следующем. Существует бесконечно много типов сводимых интегралов алгебраических функций. Каждому типу  $J_k$  соответствует кроме алгебраических соотношений ( $\Lambda_k$ ) между  $\omega_\mu$  (точками разветвления) известное «характеристическое соотношение» ( $L_k$ ) между модулями периодичности, т. е. между длинами сторон области. [В указанных далее примерах эти соотношения даны равенствами (8, 1), (9, 1)]. Как было указано раньше, области  $\mathfrak{R}$ , принадлежащие ко всякому классу многоугольников (с рациональными  $\nu_\mu$ ), образуют всюду плотное множество в множестве всех областей со спрямляемой границей в смысле равномерной сходимости. Если мы поэтому для решения нашей задачи для какого-нибудь класса областей рассмотрим достаточно большое число типов сводимых интегралов  $J_k$  (где  $k = 1, 2, \dots, n$ ), которые отображают полуплоскость  $\mathfrak{G}$  на области  $\mathfrak{R}$ , принадлежащие к рассматриваемому классу, и составим для каждого из этих типов соответствующее характеристическое соотношение между модулями его периодов, то можно будет для любой заданной области  $\mathfrak{F}$ , принадлежащей к рассматриваемому классу, найти область  $\mathfrak{R}$ , которая практически достаточно мало отличается от заданной и которая получается из  $\mathfrak{G}$  при помощи сводимого интеграла одного из указанных типов  $J_k$  (где  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Мы можем тогда (как это будет подробнее показано в приведенном дальше примере), пользуясь «характеристическим соотношением»  $L_k$ , найти модули периодичности эллиптического интеграла (или нескольких интегралов), затем, пользуясь таблицами для эллиптических интегралов, определить точки разветвления эллиптического интеграла и наконец на основании уравнений  $\Lambda_k$  определить точки разветвления  $\omega_\mu$  интеграла  $(1, 1)$ , отображающего  $\mathfrak{G}$  на область  $\mathfrak{R}$  [3].

В виду того что для эллиптических интегралов имеются таблицы, мы получаем отображающую функцию в виде, удобном для вычисления.

Существенно в этом методе то, что если задана область  $\mathfrak{P}$ , то можно легко найти для нее, какие из «характеристических соотношений» между длинами сторон этой области выполнены достаточно точно, и, исходя из этого, определить тип интеграла и найти алгебраическую трансформацию, сводящую интеграл, который аппроксимирует данный.

Установление типов сводимых интегралов в достаточно большом числе не представляет теоретически никакой трудности, но с точки зрения прикладной математики важно выбрать такие, которые при проведении этого метода требуют минимальной вычислительной работы.

Я позволю себе подробнее показать применение этого метода в частном случае, а именно в случае угловой области  $\mathfrak{P} = ABCDEF$  (фиг. 1). В этом случае гиперэллиптический интеграл



Фиг. 1

$$z(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\rho\omega)(1+\kappa\omega)(1+\lambda\omega)}} \quad (2, 1)$$

отображает полуплоскость на полигональную область  $\mathfrak{P}$ .

Один из известных случаев сводимости ( $J_1$ , случай Якоби) имеет место тогда, когда

$$A_1. \quad \rho = \kappa\lambda \quad [^3].$$

В этом случае преобразование

$$p = \frac{1 + \rho\omega^2}{\omega} \quad (3, 1)$$

переводит (2, 1) в сумму двух эллиптических интегралов

$$z = z_1 + z_2, \quad z_1 = \mp \int_{p_0}^p \frac{dp}{\sqrt{(p \pm 2\sqrt{\rho})(p-1-\rho)(p+\kappa+\lambda)}} \quad (4, 1)$$

и, далее, преобразование

$$\frac{s^2}{t^2} = \frac{p+1-\rho}{p \mp 2\sqrt{\rho}} \quad (5, 1)$$

дает

$$z = \frac{1}{2} \left[ \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_1^2 s^2)}} + \int_{t_0}^t \frac{dt}{(1-t^2)(1-k_2^2 t^2)} \right] \quad (6, 1)$$

где

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{(\sqrt{\kappa} \pm \sqrt{\lambda})^2}{(1+\kappa)(1+\lambda)}. \quad (7, 1)$$

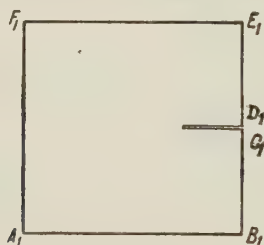
Первый (соответственно второй) интеграл отображает полуплоскость на область, указанную на фиг. 2 (соответственно фиг. 3). Легко показать, что

зять, что между длинами сторон полигональной области и модулями периодичности  $(K_n, iK'_n)$  (при  $n = 1, 2$ ) обоих интегралов существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \alpha(K_1 + K_2) & \overline{BC} &= \alpha(K'_1 + K'_2) \\ \overline{CD} &= 2\alpha K_2 & \overline{DE} &= \alpha(K'_1 - K'_2) \\ \overline{FE} &= \alpha(K_1 - K_2) & \overline{FA} &= 2\alpha K'_1 \end{aligned} \right\} \quad (8, 1)$$

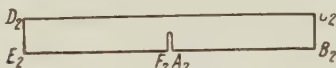
где  $\alpha$  — постоянная.

Как легко видеть, из этих шести уравнений только четыре независимые, так как  $\overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AB}$  и  $\overline{AF} + \overline{ED} = \overline{BC}$ .



Фиг. 2

С другой стороны, мы имеем только три независимые величины  $\alpha, \frac{K_1}{K'_1}, \frac{K_2}{K'_2}$ , так как из заданного  $\frac{K_n}{K'_n}$  можно определить  $K_n$  и  $K'_n$ . Так как число уравне-



Фиг. 3

ний превышает число неизвестных, то между длинами сторон должны существовать линейные соотношения, для того чтобы (8, 1) могло быть выполнено. Для определения  $\frac{K_n}{K'_n}$  получаем:

$$\frac{K_1}{K'_1} = 2 - \frac{\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD}}{\overline{AF}}, \quad \frac{K_2}{K'_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{AF}}.$$

При помощи таблиц для эллиптических интегралов мы можем определить значения  $K_n, K'_n$  и  $k_n$  (при  $n = 1, 2$ ).

Для числа  $\alpha$  мы имеем два различных уравнения, и необходимое и достаточное условие, чтобы наш интеграл принадлежал к типу  $J_1$  (случай Якоби), состоит в том, чтобы оба получаемые для  $\alpha$  значения совпадали. Наконец, по формулам (7, 1) и  $A_1$  находим значения  $\kappa, \lambda, \rho$ .

Дальнейшие типы сводимых интегралов

$$J_2 \quad z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2 - \alpha^2)[4w^3 - 3\alpha^2 w - \alpha^3(2\kappa^2 - 1)]}};$$

$$J_3 \quad z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w - p\beta_1)(w - p\beta_2)\left[w - \frac{p}{8}(4 - \sigma)\right]\left\{\left[w - \frac{p}{2}(\sigma + 2)\right]^2 + \frac{p}{4}(4 - \sigma)(\sigma + 2)\right\}}}$$

[где  $\beta_1, \beta_2$  — корни уравнения  $\beta^2 - \sigma\beta + \frac{1}{2}(4 - \sigma) = 0$ ] рассмотрены  $K_y$ .

фаревым [16]. Характеристические соотношения для этих типов между модулями периодичности имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_2 \quad & \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = 2, \\ \mathbf{I}_3 \quad & \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = 3. \end{aligned} \right\} \quad (9, 1)$$

В случае  $\mathbf{J}_2$  трансформация

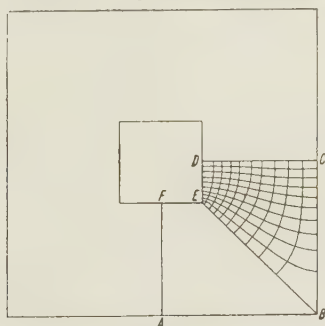
$$\xi^2 = \frac{4w^3 - 3\alpha^2 w - \alpha^3}{4w^3 - 3\alpha^2 w - \alpha^3 (2\alpha^2 - 1)},$$

а в случае  $\mathbf{J}_3$  трансформация

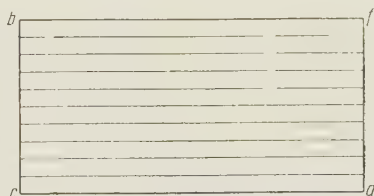
$$\xi^2 = \frac{(w - p\alpha_1)^2 (w - p\alpha_2)^2}{(w - p)^2 (w - p\beta_1) (w - p\beta_2)}$$

переводит указанный интеграл в эллиптический  $\left( \alpha_1, \alpha_2 \text{—корни уравнения } \alpha^2 - \frac{1}{2}(2 + \sigma)\alpha + \frac{1}{8} \cdot \frac{4 - \sigma}{2 + \sigma} = 0 \right)$ .

Применяя изложенный метод, удалось определить и изучать линии тока в области, указанной на фиг. 4. Линии тока получаются легко из линий  $x = \text{const}$ , если отобразить область, указанную на фиг. 5, на



Фиг. 4



Фиг. 5

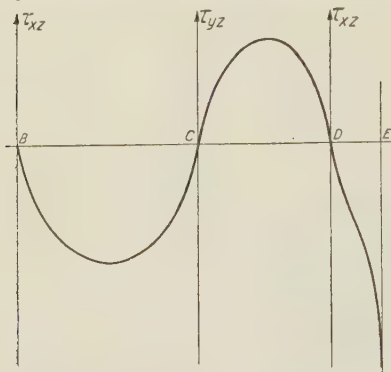
угловую область (фиг. 1) так, чтобы точки  $a, f, b, c$  перешли в точки  $A, F, B, C$  [3, 18].

Дальше удалось определить напряжения и смещения стержня углового сечения (фиг. 1) при кручении на изгиб [13, 16]. В случае кручения задача сводится к определению сопряженной гармонической функции, принимающей на границе области значения  $|z|^2$ , и ее производной. На фиг. 6а и 6б указаны напряжения и смещения на границе в случае изгиба. В вычисленном примере

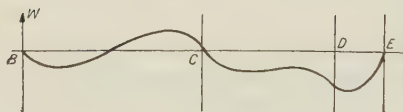
$$\overline{DC} = \overline{DE} = 2.7222; \quad \overline{CB} = \overline{EF} = 2.0008.$$

Я хотел бы добавить, что вопрос о решении граничной задачи теории потенциала для области, для которой известна функция, отображающая ее на круг, приводит к известным практическим трудностям. Если пере-

нести граничные значения на окружность, то можно при помощи рядов Фурье определить гармоническую функцию, принимающую заданные значения.



Фиг. 6а



Фиг. 6б

Вычисление коэффициентов Фурье, например, при помощи анализаторов не представляет никаких трудностей. Но определение функции из заданных коэффициентов Фурье сопряжено с очень большой вычислительной работой, и мне кажется, что следовало бы создать аппараты для решения этой задачи. В случае, если производные функции имеют разрывы, при вычислении целесообразно применить метод, указанный А. Н. Крыловым (см., например, И. И. Привалов, «Ряды Фурье» 1935, стр. 88—92), или же, в случае полигональной области, метод, указанный в работе Бернштейна<sup>1</sup>.

## § 2

Другой предлагаемый нами метод основывается на построении комплексных ортогональных функций и в связи с ними неевклидовой метрики, инвариантной при конформных отображениях [1, 9].

Пусть  $\mathfrak{B}$  какая-нибудь связная область, лежащая целиком в ограниченной части плоскости;  $\varphi_\nu(z)$  (при  $\nu = 1, 2, \dots$ ) — полная система функций, ортогональных в ней, т. е. таких, что

$$\int_{\mathfrak{B}} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\mu(z)} d\omega = \delta_{\nu\mu}, \quad \delta_{\nu\nu} = 1; \quad d\omega = dx dy \quad (1, 2)$$

$$\delta_{\nu\mu} = 0; \quad \nu \neq \mu$$

и что для всякой функции  $f$ , регулярной в  $\mathfrak{B}$ ,

$$\int_{\mathfrak{B}} |f|^2 d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{B}} f \overline{\varphi_\nu} d\omega \right|^2. \quad (2, 2)$$

Тогда, как можно показать,  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_\nu(z)|^2$  есть действительная функция, которая регулярна (будучи рассматриваема как функция двух

<sup>1</sup> Указанный метод состоит в том, что для функции  $H$ , заданной на контуре полигональной области  $\mathfrak{B}$ , строится гармонический полином  $P$  так, чтобы после преобразования на окружность функция  $H - P$  имела повсюду (также и в точках круга, соответствующих угловым точкам  $\mathfrak{B}$ ) непрерывную производную.



переменных  $x, y$ ) для всех  $z = x + iy$ ,  $z \in \mathfrak{B}$  [1, 12]. Мы ее называем керн-функцией области  $\mathfrak{B}$ . Она не зависит от выбора полной системы ортогональных функций и является интегральной инвариантой при конформных отображениях. Линейный элемент

$$ds^2 = K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) |dz|^2 \quad (3, 2)$$

дает нам метрику, инвариантную при этих отображениях. Инвариант конформных отображений (отличается от кривизны отрицательным постоянным множителем)

$$J_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \frac{\pi}{K_{\mathfrak{B}}} \cdot \frac{\partial^2 \ln K_{\mathfrak{B}}}{\partial z \partial \bar{z}} [3]. \quad (4, 2)$$

Заметим, что  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  можно определить также и иным путем: если  $h(z)$  пробегает совокупность  $L$  функций, регулярных в  $\mathfrak{B}$ , для которых  $\int_{\mathfrak{B}} |h(z)|^2 d\omega \leq 1$ , то

$$K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \max_{h \in L} |h(z)|^2. \quad (5, 2)$$

В случае односвязных областей из теоремы Римана легко следует, что полученная метрика есть метрика гиперболическая. (Для круга  $\mathfrak{B}$   $|w| < 1$ ;  $K_{\mathfrak{B}}(w, \bar{w}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - w\bar{w})^2}$ ;  $J_{\mathfrak{B}}(w, \bar{w}) = 2$ .) В случае многосвязных областей мы получаем Риманову метрику с переменной кривизной. Функция

$$\varphi(z, a) = \int_0^z \frac{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{K_{\mathfrak{B}}(a, \bar{a})} dz, \quad a \in \mathfrak{B} \quad (6, 2)$$

отображает область  $\mathfrak{B}$  на так называемую минимальную область, т. е. такую, которая нормированной функцией  $f(w)$  ( $|f'(0)| = 1$ ) не может

быть отображена на область меньшей площади.  $M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a}) = \frac{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{K_{\mathfrak{B}}(a, \bar{a})}$  на-

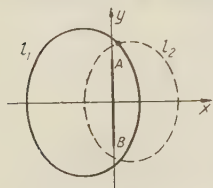
зывается минимальной функцией области  $\mathfrak{B}$ . В случае односвязной области минимальная область — круг<sup>1</sup>, а в случае двусвязных областей — это области, лежащие на двулистной Римановой поверхности (фиг. 7) [17].

Функция  $\nu(z, \bar{a}) = \frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(a, \bar{a})} \cdot \frac{\partial \ln M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{\partial \bar{a}}$  отображает  $\mathfrak{B}$  на так на-

<sup>1</sup> В виду того что существование функции, отображающей на минимальную область, может быть доказано независимо от теоремы Римана о существовании функции, отображающей на круг, интересно было бы доказать (не прибегая к теореме Римана), что всякая односвязная минимальная область  $\mathfrak{M}$  есть круг, и таким образом дать новое доказательство теоремы Римана. До сих пор однако удалось показать, что  $\mathfrak{M}$  есть круг только в том случае, если  $\mathfrak{M}$  звездная область и ограничена всюду дифференцируемой кривой [6].

зываемую репрезентативную область [21, 19]. Для односвязной области репрезентативная область является тоже кругом.

Что касается эффективного построения ортогональных функций, например в случае односвязной области полиномов, то их можно получить хотя бы при помощи ортогонализации степеней  $z^v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ). Но на практике можно вычислить только небольшое количество ортогональных функций, а ряды, в особенности вблизи границы, очень плохо сходятся; кроме того, область, получаемая



Фиг. 7. Минимальная двусвязная область. Граничные кривые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в различных листах Римановой поверхности.  $AB$  — купюра

из  $\mathfrak{B}$  при помощи приближений  $\sum_{v=1}^n \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(a)}$ , в общем случае не однолистка, и поэтому этот метод целесообразно применять только в случае, если  $\mathfrak{B}$  мало отличается от круга <sup>1</sup>.

Если нам известны ортогональные функции для области  $\mathfrak{B}$  и для  $\mathfrak{B}^*$ , то нетрудно с их помощью выразить функцию, отображающую  $\mathfrak{B}$  на  $\mathfrak{B}^*$  [8, стр. 670].

Ортогональные функции можно непосредственно применить для решения краевых задач, в особенности для уравнений  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta \Delta u = 0$  и уравнений теории упругости [4, 5]. (Эти ортогональные функции являются частными решениями данного уравнения.) На фиг. 8a—8d указаны приближения такого рода для гармонической функции в цилиндре, основание которого есть круг радиуса, равного 1, а высота тоже равна 1 [5]. Искомая функция принимает на кругах радиуса 0.5, лежащих на обоих основаниях, значение 1, а на остальной части исчезает. На фиг. 8a—8d указаны изменения заданной и аппроксимирующих функций вдоль радиуса основания и вдоль образующей.

Мне кажется, что было бы целесообразно серьезно заняться вопросом о том, насколько применение ортогональных функций в общем случае позволяет разрешить граничные задачи. В особенности можно было бы рассчитывать на успех, если бы были построены машины для решения системы линейных уравнений со многими неизвестными.

Использование неевклидовой метрики дает метод для отображения двусвязных областей. Как известно, можно отобразить всякую двусвязную область на кольцо, причем отношение радиусов обоих кругов

<sup>1</sup> Этот метод для односвязных областей был в другой форме указан Би-б-рхаом [14].

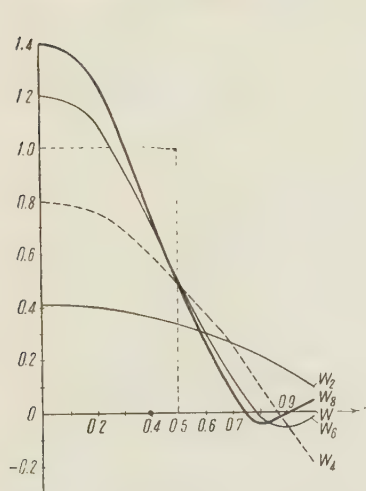
В еще неопубликованной работе М. В. Келдыш указал условия, когда ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(a)}, \quad a \in \mathfrak{B},$$

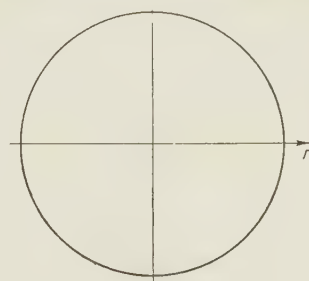
сходится на границе области  $\mathfrak{B}$  в том случае, если  $\varphi_v(z)$  — ортогональные полиномы.

(модуль двусвязной области) является инвариантой при конформных отображениях.

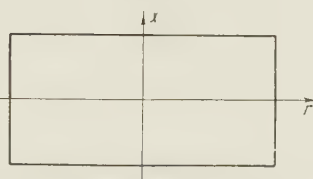
Для кольца  $\mathfrak{R} = E[r < |\omega| < 1]$  метрика (3, 2) изучена Заранкевичем [11, 13]. Инвариант  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$  не постоянен, изменения  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$  вдоль радиуса  $\arg \omega = \text{const}$  указаны на фиг. 9б. На границе  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega}) = 2$ , а для  $|\omega| = \sqrt{z} J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$  принимает максимальное значение  $J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$ . Вдоль концентрических кругов  $J_{\mathfrak{R}}(\omega, \bar{\omega})$ , конечно, постоянно.  $J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$  является ра-



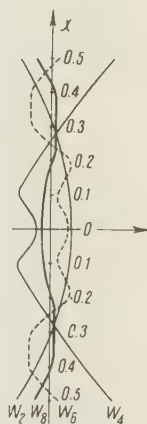
Фиг. 8а



Фиг. 8б



Фиг. 8с



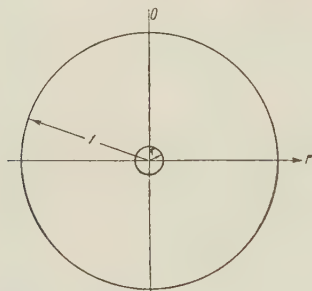
Фиг. 8д

стущей функцией модуля двусвязной области. Если поэтому нам задана двусвязная область  $\mathfrak{B}_2$  и мы можем высчитать достаточно большое количество ортогональных функций [например, путем ортогонализирования системы  $z^v, (z-a)^{-v}$  (при  $v = 1, 2, \dots$ ), где  $a$  — внешняя точка области  $\mathfrak{B}_2$ , лежащая внутри внутреннего контура], то можно с известной степенью точности сконструировать кривые  $J_{\mathfrak{B}_2}(z, \bar{z}) = \text{const}$ , которые являются образами концентрических кругов  $|\omega| = \text{const}$  кольца  $\mathfrak{R}$ ; ортогональные траектории к ним являются образами радиусов кольца  $\arg \omega = \text{const}$ . То что  $J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$  является возрастающей функцией модуля, позволяет нам определить этот модуль, так как мы можем высчитать приблизительно  $J_{\mathfrak{B}_2}^{(\max)} = J_{\mathfrak{R}}^{(\max)}$ , а это позволяет определить радиус  $r$  кольца  $\mathfrak{R}$ , на которое отображается  $\mathfrak{B}_2$ . Если мы теперь любую точку кривой  $J_{\mathfrak{B}_2}(z, \bar{z}) = J_{\mathfrak{B}_2}^{(\max)}$  примем за начало координат, линии  $J_{\mathfrak{B}_2}(z, \bar{z}) = \text{const}$  и их ортогональные траектории — за координаты, а расстояния вдоль них будем измерять при помощи инвариантной метрики (3, 2), то мы получим так называемые «естественные координаты», которые инвариантны при отображениях. (Построение этих координат, конечно,

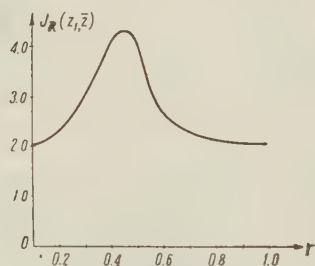
позволяет отобразить  $\mathfrak{B}_2$  на кольцо!) [14, 15]. Примеры эффективного применения этого метода не были вычислены. Его недостаток состоит в том, что практически возможно вычислить только небольшое число ортогональных функций, сумма которых в частях области  $\mathfrak{B}_2$ , близко лежащих к границе, плохо сходится.

Мы переходим к указанию других методов для вычисления керн-функции, инвариант и т. д., которые в особенности можно использовать на практике для точек, близко лежащих к границе области [9].

Как  $\frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})}$ , так и все другие величины, встречающиеся в неевклидовой метрике, являются минимальными значениями в известных ва-



Фиг. 9a



Фиг. 9b

риационных задачах. Если мы, например, ищем минимум  $\int_{\mathfrak{B}} |h|^2 d\omega$  при условии, что  $h$  регулярна в области  $\mathfrak{B}$  и  $|h(t)| = 1$ ,  $t \in \mathfrak{B}$ , то минимум равен  $\frac{1}{K_{\mathfrak{B}}(t, \bar{t})}$ . Если мы на  $h(t)$  накладываем более сложные условия, то для минимального значения получаются другие характерные для нашей метрики величины. Если поэтому  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ , то

$$K_{\mathfrak{F}}(z, \bar{z}) \geq K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) \geq K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}). \quad (7, 2)$$

Во многих случаях нетрудно выбрать такие  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{A}$  (внутренняя и внешняя области сравнения), для которых функции, отображающие их на круг (или кольцо), известны, и часть границы  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A}$  совпадает. Тогда в известной окрестности этой части границы  $K_{\mathfrak{F}}(z, \bar{z})$  и  $K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z})$  практически мало отличаются одна от другой, а на основании (7, 2) мы можем в данных точках определить  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$ . Заметим, что этот метод можно использовать для получения предельных формул: пусть  $Q$  — граничная точка  $\mathfrak{B}$ , в которой существует нормаль  $n$ , и пусть положительная ось  $x$  совпадает с внутренней нормалью  $n$ , а ось  $y$  с касательной  $\bar{n}$  в точке  $Q$ . Такие координаты называются нормальными в точке  $Q$ . Положим, что существуют два круга  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{F}$  с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , каса-

ющиеся в точке  $Q$  касательной  $\mathfrak{f}$  так, что  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{F}$ . Тогда легко считать, что при приближении

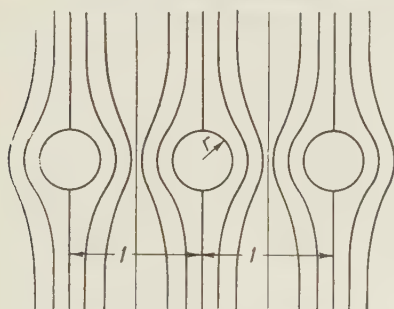
$$A^I \quad \left( \frac{2|z|}{z + \bar{z}} < \frac{1}{\cos \alpha}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\lim_{z \rightarrow Q} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{F}}(z, \bar{z}) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi}.$$

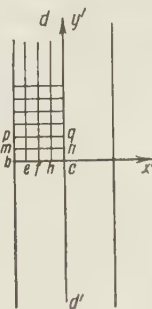
На основании (7, 2) следует, что при приближении  $A^I$

$$\lim_{z \rightarrow Q} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} [9].$$

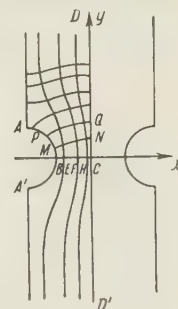
Этого рода методы позволяют вычислить выражения, которые в окрестности данных частей границы хорошо аппроксимируют  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$ ,  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$



Фиг. 10



Фиг. 11a



Фиг. 11b

и т. д. Во многих случаях можно также подобрать области сравнения  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{A}$  так, что в известной части области  $\mathfrak{B}$  выражения  $K_{\mathfrak{F}}(z, \bar{z})$  и  $K_{\mathfrak{A}}(z, \bar{z})$  практически будут совпадать.

Поясним в общих чертах на примере применение этого метода. Известная задача гидродинамики состоит в том, чтобы найти линии тока в области, указанной на фиг. 10. Очевидно задача будет решена, если мы сумеем отобразить область  $\mathfrak{B} = E[0 < \operatorname{Re} w < 1]$  (фиг. 11a) на  $\mathfrak{B} = E[0 < \operatorname{Re} z < 1, |z| > a, |z-1| > a]$  (фиг. 11b) так, чтобы точки  $d, d'$  перешли в точки  $D, D'$ , а действительная и мнимая ось — в самих себя. В окрестности точки  $C$  можно  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  вычислить при помощи ортогональных функций и, пользуясь затем метрикой (3, 2), найти на  $\overline{BC}$  и  $\overline{CD}$  точки, соответствующие точкам  $e, f \dots$ . Чтобы найти  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  вблизи дуги  $\overline{AB}$ , можно взять  $\mathfrak{F} = E[0 < \operatorname{Re} z < 1 - a, |z| > a]$ , и  $\mathfrak{A} = E[0 < \operatorname{Re} z, |z| > a]$ , а вблизи  $D$   $\mathfrak{F} = E[0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > a]$ ,  $\mathfrak{A} = E[0 < \operatorname{Re} z < 1]$ . Для того чтобы перенести геодезические линии  $ed_1, fd_2, hd_3, \dots$  и  $mn, pq, \dots$ , мы строим в  $\mathfrak{B}$  геодезические линии, исходящие из точек  $E, F, H, N$  и образующие с  $BC$  или  $CD$  прямой угол. Уравнение геодезической линии имеет вид:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{K_{\mathfrak{B}}} \cdot \frac{dK_{\mathfrak{B}}}{dz} \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 0,$$

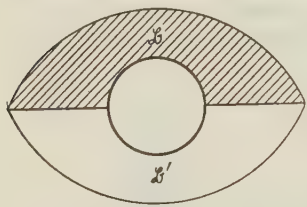


причем  $\frac{dK_{\mathfrak{B}}}{dz}$  можно вычислять подобным же образом, что и  $K_{\mathfrak{B}}(z)$  [10].

Заметим, что совокупность геодезических линий метрики (3, 2) может быть построена или аппроксимирована, исходя из следующей теоремы [19].  
Кривые

$$\frac{\partial \ln M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})}{\partial \bar{a}} = \alpha p,$$

где  $\alpha$  — комплексное постоянное,  $p$  — параметр,  $M_{\mathfrak{B}}(z, \bar{a})$  — минимальная функция области  $\mathfrak{B}$  (см. стр. 117), проходят через точку и имеют в ней соприкосновение не менее второго порядка с геодезическими линиями метрики (3, 2), установленной внутри области  $\mathfrak{B}$ . В случае, если область  $\mathfrak{B}$  односвязная, эти кривые полностью совпадают с геодезическими линиями.



Фиг. 12

В некоторых случаях для определения  $K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z})$  следует вычислить несколько ортогональных функций  $\varphi_s(z)$  (при  $s = 1, 2, \dots, n$ ), и затем только для определения

$$\left[ K_{\mathfrak{B}}(z, \bar{z}) - \sum_{s=1}^n |\varphi_s(z)|^2 \right]$$

пользоваться внешней и внутренней областью сравнения. Нередко (см., например, область, указанную на фиг. 12) целесообразно путем зеркального отображения перейти от односвязной области  $\mathfrak{B}$  к двусвязной  $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$  и применять для отображения указанный на стр. 118 метод для двусвязных областей.

В заключение заметим, что ортогональные функции можно привлечь также для определения констант в интегралах Шварц-Кристоффеля [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Бергман [Bergmann], MA, **86**, 237—271 (1922). <sup>2</sup> MZ, **19**, 8—23 (1923).
- <sup>3</sup> ZaMM, **5**, 319—331 (1925); **8**, 452—453 (1928). <sup>4</sup> MA, **98**, 248—269 (1927).
- <sup>5</sup> ZaMM, **8** (1928). <sup>6</sup> Sitzungs. d. Berl. math. Gesellschaft, **30**, 11—13 (1892).
- <sup>7</sup> MZ, **29**, 481—486 (1929). <sup>8</sup> MZ, **29**, 640—670 (1929). <sup>9</sup> Crell's Journal f. reine u. angew. Math., **169**, 1—42 (1933); **172**, 89—128 (1934). <sup>10</sup> TI, **1**, 69—74 (1935).
- <sup>11</sup> Бибербах [Bieberbach], Rendiconti di Circolo mat. di Palermo, **38**, 98 (1915).
- <sup>12</sup> Бохнер [Bochner], MZ, **14** (1922).
- <sup>13</sup> Бернштейн [Bernstein], Zum Torsionsproblem des Winkelquerschnittes, ПММ (печатается).
- <sup>14</sup> Заранкевич [Zarankiewicz], ZaMM, **14**, 97—104 (1934).
- <sup>15</sup> — CR, **198**, 1347 (1934).
- <sup>16</sup> Куфарев [Kufareff], К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения, ПММ (печатается).
- <sup>17</sup> Куфарев [Kufareff], TI, **1**, 228—235 (1936).
- <sup>18</sup> Штейн [Stein], ZaMM, **9**, 23 (1929).
- <sup>19</sup> Фукс [Fuchs], Über die geodätischen Mannigfaltigkeiten einer gegenüber analytische Abbildungen invarianten Metrik, Matem. сб. (печатается).

<sup>20</sup> Бергман и Куфарев [Bergmann u. Kufareff], ПММ (печатается).

<sup>21</sup> Бергман (Bergmann) МА, 10<sup>4</sup>, 611—636 (1931).

#### С о к р а щ е н и я

ТИ—Известия НИИММа при Томском гос. университете им. Куйбышева.

ПММ—Прикладная математика и механика.

МА—Mathematische Annalen.

MZ—Mathematische Zeitschrift.

ZaMM—Zeitschrift für angew. Mathematik u. Mechanik.

CR—Comptes Rendus de l'Academie de Sciences (Paris).

Научно-исслед. институт математики и механики  
при Томском гос. университете  
им. Куйбышева.

#### STEFAN BERGMANN. ÜBER EINIGE METHODEN ZUR EFFEKTIVEN DURCHFÜHRUNG DER KONFORMEN ABBILDUNG

#### ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Note schildern wir einige neue Methoden der konformen Abbildung, welche sich im Zusammenhange mit der Schwarz-Christoffelschen Formel und mit der Theorie der komplexen Orthogonalfunktionen befinden.



А. К. МИТРОПОЛЬСКИЙ

# ОБ УСТАНОВЛЕНИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПО СПОСОБУ ЧЕБЫШЕВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном)

В этой статье устанавливается общий вид корреляционных уравнений как непосредственный результат применения способа Чебышева. Для упрощения вычислений использованы определители: коэффициенты корреляционных уравнений выражены при помощи основных моментов.

1. Положим, что корреляционное уравнение, выражающее зависимость статистической величины  $X_2$  от  $X_1$ , имеет вид:

$$r_{(j_1)/1}^{(h)} = \sum_{g=0}^n c_g \varphi_g(\xi_1(j_1)), \quad (1)$$

где  $\xi_1(j_1)$  есть нормированное значение статистической величины  $X_1$ , а  $r_{(j_1)/1}^{(h)}$  — условный основной момент статистической величины  $X_2$ .

Пусть в уравнении (1) функции  $\varphi_g(\xi_1)$

1) являются ортогональными функциями от  $\xi_1$ , т. е. удовлетворяют условиям

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1} \cdot \varphi_f(\xi_1(j_1)) \varphi_g(\xi_1(j_1)) \begin{cases} = 0, & \text{если } f \neq g \\ \neq 0, & \text{если } f = g \end{cases} \quad (2)$$

2) связаны с предшествующими им функциями равенством

$$\varphi_g(\xi_1(j_1)) = \xi_1(j_1)^g - \sum_{f=0}^{g-1} q_{g,f} \varphi_f(\xi_1(j_1)) \quad (g = \overline{0, h}), \quad (3)$$

где  $q_{g,f}$  — некоторые постоянные коэффициенты, причем

$$\varphi_0(\xi_1) = 1. \quad (4)$$

2. Определим функции  $\varphi_g(\xi_1)$  и коэффициенты  $c_g$  корреляционного уравнения (1), пользуясь символами Чебышева:

$$(f, g) = \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1} \cdot \xi_1(j_1)^g \varphi_f(\xi_1(j_1)). \quad (5)$$

При этом заметим, что, принимая во внимание (3) и условия ортогональности (2), мы можем написать:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot [\varphi_g(\xi_{1(j_1)})]^2 &= \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot \left\{ \xi_{1(j_1)}^g - \sum_{f=0}^{g-1} q_{g,f} \varphi_f(\xi_{1(j_1)}) \right\} \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot \xi_{1(j_1)}^g \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) = (g, g). \end{aligned} \quad (6)$$

Введенные условия (2) и (3) дают возможность найти функции  $\varphi_g(\xi_1)$ .

Умножая (3) последовательно на

$$p_{j_1 l} \cdot \varphi_0(\xi_{1(j_1)}), p_{j_1 l} \cdot \varphi_1(\xi_{1(j_1)}), \dots, p_{j_1 l} \cdot \varphi_{g-1}(\xi_{1(j_1)})$$

и суммируя по всем значениям  $j_1 = \overline{1, k_1}$ , определим коэффициенты  $q_{g,f}$ . Подставляя значения этих коэффициентов в (3), находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\xi_1) &= 1, \\ \varphi_1(\xi_1) &= \xi_1 - \frac{(0, 1)}{(0, 0)} \varphi_0(\xi_1), \\ \varphi_2(\xi_1) &= \xi_1^2 - \frac{(1, 2)}{(1, 1)} \varphi_1(\xi_1) - \frac{(0, 2)}{(0, 0)} \varphi_0(\xi_1), \\ \varphi_3(\xi_1) &= \xi_1^3 - \frac{(2, 3)}{(2, 2)} \varphi_2(\xi_1) - \frac{(1, 3)}{(1, 1)} \varphi_1(\xi_1) - \frac{(0, 3)}{(0, 0)} \varphi_0(\xi_1), \\ &\dots \\ \varphi_g(\xi_1) &= \xi_1^g - \frac{(g-1, g)}{(g-1, g-1)} \varphi_{g-1}(\xi_1) - \frac{(g-2, g)}{(g-2, g-2)} \varphi_{g-2}(\xi_1) - \\ &\dots - \frac{(2, g)}{(2, 2)} \varphi_2(\xi_1) - \frac{(1, g)}{(1, 1)} \varphi_1(\xi_1) - \frac{(0, g)}{(0, 0)} \varphi_0(\xi_1). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. Коэффициенты  $c_g$  корреляционного уравнения (4) определяются при условии, что сумма

$$Z_h = \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot \left\{ r_{(j_1)l}^{(h)} - \sum_{g=0}^h c_g \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) \right\}^2 \quad (8)$$

будет минимумом. Это условие дает систему  $h+1$  уравнений, которые получаются, если приравнять нулю первые производные выражения (8) по  $c_f$ , где

$$f = \overline{0, h}.$$

Имеем:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Z_h}{\partial c_f} = \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot \varphi_f(\xi_{1(j_1)}) \left\{ r_{(j_1)l}^{(h)} - \sum_{g=0}^h c_g \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) \right\} = 0$$

или

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot r_{(j_1)l}^{(h)} \varphi_f(\xi_{1(j_1)}) = \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1 l} \cdot \varphi_f(\xi_{1(j_1)}) \sum_{g=0}^h c_g \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) \quad (f = \overline{0, h}) \quad (9)$$



При введенных условиях ортогональности (2) система  $h+1$  уравнений (9) примет вид

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) = c_g \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot [\varphi_g(\xi_{1(j_1)})]^2 \quad (g = \overline{0, h}). \quad (10)$$

И следовательно, искомые коэффициенты оказываются отделенными и могут быть вычислены по формуле

$$c_g = \frac{\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \varphi_g(\xi_{1(j_1)})}{\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot [\varphi_g(\xi_{1(j_1)})]^2} \quad (g = \overline{0, h}). \quad (11)$$

Применяя последовательно эту формулу, находим:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{r_{0/1}}{(0, 0)}, \\ c_1 &= \frac{r_{1/1} - c_0 \cdot (0, 1)}{(1, 1)}, \\ c_2 &= \frac{r_{2/1} - c_0 \cdot (0, 2) - c_1 \cdot (1, 2)}{(2, 2)}, \\ c_3 &= \frac{r_{3/1} - c_0 \cdot (0, 3) - c_1 \cdot (1, 3) - c_2 \cdot (2, 3)}{(3, 3)}, \\ &\dots \dots \dots \\ c_g &= \frac{r_{g/1} - c_0 \cdot (0, g) - c_1 \cdot (1, g) - c_2 \cdot (2, g) - \dots - c_{g-1} \cdot (g-1, g)}{(g, g)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

4. Наконец, при тех же самых условиях ортогональности (2), величина критерия  $\zeta_h$  корреляционного уравнения  $h$ -го порядка, представляющая минимум суммы (8), равна

$$\begin{aligned} \zeta_h &= \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \left\{ r_{(j_1)/1}^{(h)} - \sum_{g=0}^h c_g \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) \right\} = \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)2} - \sum_{g=0}^h c_g \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \varphi_g(\xi_{1(j_1)}) \end{aligned}$$

или

$$\zeta_h = \zeta_{h-1} - c_h \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \varphi_h(\xi_{1(j_1)}) = \zeta_{h-1} - \frac{\left\{ \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1/} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \varphi_h(\xi_{1(j_1)}) \right\}^2}{(h, h)} \quad (13)$$

с основной ошибкой

$$\sigma_{\zeta_h} = \sqrt{\frac{\zeta_h}{N}}. \quad (14)$$

Так как в выражении (13) из  $\zeta_{h-1}$  вычитается существенно положительная величина, то всегда имеет место неравенство:

$$\zeta_h < \zeta_{h-1}. \quad (15)$$

Таким образом с повышением порядка корреляционного уравнения степень приближения его к графику зависимости статистической величины  $X_2$  от  $X_1$  возрастает. И следовательно, критерий  $\zeta_h$ , взятый вместе с его основной ошибкой, позволяет очень просто оценить достоинство корреляционного уравнения  $h$ -го порядка.

5. При вычислении корреляционных уравнений наиболее удобно пользоваться определителями, выражая коэффициенты корреляционных уравнений при помощи основных моментов.

В рассматриваемом случае корреляционных уравнений, когда взяты нормированные значения статистических величин, символы Чебышева (5) могут быть представлены при помощи основных моментов следующим образом:

$$(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & r_{f-1/0} & r_{g/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots & r_{f/0} & r_{g+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots & r_{f+1/0} & r_{g+2/0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{f/0} & r_{f+1/0} & r_{f+2/0} & \dots & r_{2f-1/0} & r_{2g/0} \end{vmatrix} \quad (16)$$

В частности

$$(0, g) = (1, g-1) = r_{g/0}, \quad (17)$$

$$(2, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{g/0} \\ 0 & 1 & r_{g+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{g+2/0} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$(3, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & r_{g/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & r_{g+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & r_{g+2/0} \\ r_{3/0} & r_{4/0} & r_{5/0} & r_{g+3/0} \end{vmatrix} \quad (19)$$

и так далее.

6. Введем теперь обозначения:

$$D^{(h)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & r_{h-1/0} & r_{h/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots & r_{h/0} & r_{h+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots & r_{h+1/0} & r_{h+2/0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{h/0} & r_{h+1/0} & r_{h+2/0} & \dots & r_{2h-1/0} & r_{2h/0} \end{vmatrix} \quad (20)$$



7. Определим далее величину  $(g, g)$ .

Заменяя в выражении (6)  $\varphi_g(\xi_1)$  на основании (24), имеем:

$$\sum_{j_1=1}^{h_1} p_{j_1} \cdot [\varphi_g(\xi_{1(j_1)})]^2 = \sum_{j_1=1}^{h_1} p_{j_1} \cdot \xi_{1(j_1)}^g \frac{D^{(g)*}}{D^{(g-1)}}.$$

Умножая каждый член  $g$ -го столбца определителя  $D^{(g)*}$  на  $p_{j_1} \cdot \xi_{1(j_1)}^g$  и суммируя по всем значениям  $j_1 = \overline{1, h_1}$ , получим:

$$(g, g) = \sum_{j_1=1}^{h_1} p_{j_1} \cdot [\varphi_g(\xi_{1(j_1)})]^2 = \frac{D^{(g)}}{D^{(g-1)}}. \quad (25)$$

Из равенства (25), левая часть которого есть величина существенно положительная, следует, что определители  $D^{(g)}$  и  $D^{(g-1)}$  имеют одинаковый знак. Поэтому, давая  $g$  убывающие значения, найдем, что все определители

$$D^{(g)}, D^{(g-1)}, D^{(g-2)}, \dots, D^{(2)}, D^{(1)}, D^{(0)}$$

будут иметь одинаковый знак. Но

$$D^{(0)} = r_{0/0} = 1 > 0.$$

Отсюда мы заключаем, что все определители

$$D^{(0)}, D^{(1)}, \dots, D^{(g)}$$

являются положительными:

$$D^{(g)} > 0 \quad (g = \overline{1, h}). \quad (26)$$

8. Выразим также при помощи определителей коэффициенты  $c_g$ .

Рассматривая выражения (12), находим:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{r_{0/1}}{1} = \frac{D_0^{(0)}}{D^{(0)}} = 0 \\ c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{0/1} \\ 0 & r_{1/1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{D_1^{(1)}}{D^{(1)}} \\ c_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & r_{0/1} \\ 0 & 1 & r_{1/1} \\ 1 & r_{3/0} & r_{2/1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & r_{3/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} \end{vmatrix}} = \frac{D_2^{(2)}}{D^{(2)}} \\ c_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & r_{0/1} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & r_{1/1} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & r_{2/1} \\ r_{3/0} & r_{4/0} & r_{5/0} & r_{3/1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & r_{3/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & r_{4/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & r_{5/0} \\ r_{3/0} & r_{4/0} & r_{5/0} & r_{6/0} \end{vmatrix}} = \frac{D_3^{(3)}}{D^{(3)}} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$c_g = \frac{\left. \begin{array}{c} \dots \dots \dots \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \dots r_{0/1} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots r_{1/1} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots r_{2/1} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right| \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}}{\left| \begin{array}{cccc} r_{g/0} & r_{g+1/0} & r_{g+2/0} & \dots r_{g/1} \\ 1 & 0 & 1 & \dots r_{g/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots r_{g+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots r_{g+2/0} \\ \dots \dots \dots \\ r_{g/0} & r_{g+1/0} & r_{g+2/0} & \dots r_{2g/0} \end{array} \right|} = \frac{D_g^{(g)}}{D^{(g)}}. \quad (27)$$

Подставляя найденные выражения  $c_g$  и  $\Phi_g(\xi_1)$  в (1), мы можем корреляционное уравнение  $h$ -го порядка представить в виде:

$$r_{(j_1)/1}^{(h)} = \sum_{g=1}^h \frac{D_g^{(g)}}{D^{(g-1)}} \frac{D_g^{(g)*}}{D^{(g)}}. \quad (28)$$

Этот общий вид корреляционного уравнения совпадает с формулой, полученной Нейманом иным путем.

9. Представим, наконец, при помощи определителей критерий  $\zeta_h$ . Рассмотрим выражение (13). Принимая во внимание (24), получаем

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{j_1} \cdot r_{(j_1)/1}^{(h)} \varphi_h(\xi_{1(j_1)}) = \frac{D_h^{(h)}}{D^{(h-1)}}. \quad (29)$$

Кроме того, на основании (25), имеем:

$$(h, h) = \frac{D_h^{(h)}}{D^{(h-1)}}. \quad (30)$$

Следовательно,

$$\zeta_h = \zeta_{h-1} - \frac{D_h^{(h)2}}{D^{(h-1)} D^{(h)}}. \quad (31)$$

Постепенно повышая порядок корреляционного уравнения (28), начиная с  $h=1$ , и оценивая результат при помощи критерия (31) с его основной ошибкой (14), мы можем выразить зависимость статистической величины  $X_2$  от  $X_1$  с достаточной точностью, определяемой величиной  $\zeta_h$ .

Собирая в (28) члены с одинаковыми степенями  $\xi_1$  и замечая, что

$$D_g^{(h)} = \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & \dots r_{g-1/0} & 0 & r_{g+1/0} & \dots r_{h/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots r_{g/0} & r_{1/1} & r_{g+2/0} & \dots r_{h+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots r_{g+1/0} & r_{2/1} & r_{g+3/0} & \dots r_{h+2/0} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ r_{h/0} & r_{h+1/0} & r_{h+2/0} & \dots r_{h+g-1/0} & r_{h/1} & r_{h+g+1/0} & \dots r_{2h/0} \end{array} \right| \quad (32)$$

мы можем представить корреляционное уравнение  $h$ -го порядка в виде

$$r_{(j_1)/1}^{(h)} = \sum_{g=0}^h \frac{D_g^{(h)}}{D^{(h)}} \xi_{1(j_1)}^g \quad (33)$$



10. В заключение рассмотрим множественное корреляционное уравнение, выражающее зависимость статистической величины  $X_1$  от статистических величин

$$X_2, X_3, \dots, X_N.$$

Положим, что это уравнение является линейным и имеет вид:

$$r_{1/(j_2) / (j_3) / \dots / (j_N)} = \sum_{g=2}^N a_g \phi(\xi_g), \quad (34)$$

где функции  $\phi(\xi_g)$  удовлетворяют условиям ортогональности

$$\sum_{j_f=1}^{k_f} \sum_{j_g=1}^{k_g} p_{j_f/j_g} \phi(\xi_{f(j_f)}) \phi(\xi_{g(j_g)}) \begin{cases} = 0, & \text{если } f \neq g \\ \neq 0, & \text{если } f = g \end{cases} \quad (35)$$

и связаны с предшествующими им функциями равенством

$$\phi(\xi_g) = \xi_g - \sum_{f=1}^{g-1} t_{g,f} \phi(\xi_f), \quad (36)$$

причем коэффициенты  $a_g$  определяются при условии, что сумма

$$W_N = \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} \dots \sum_{j_N=1}^{k_N} p_{j_2/j_3/\dots/j_N} \left\{ r_{1/(j_2)/(j_3)/\dots/(j_N)} - \sum_{g=2}^N a_g \phi(\xi_g) \right\}^2 \quad (37)$$

будет минимумом.

При этих условиях, применяя метод, изложенный выше, находим:

$$\bar{a}_g = \frac{R_{g1}^{(g)}}{R_{11}^{(g)}}, \quad (38)$$

$$\phi(\xi_g) = \frac{R_{g1}^{(g)k}}{R_{11}^{(g-1)}}, \quad (39)$$

где

$$R^{(g)} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1g} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2g} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{g1} & r_{g2} & r_{g3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (40)$$

$$R^{(g)*} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_g \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2g} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{g1} & r_{g2} & r_{g3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (41)$$

а  $R_{mn}^{(g)}$  и  $R_{mn}^{(g)*}$  являются минорами определителей  $R^{(g)}$  и  $R^{(g)*}$ , соответствующими элементу  $r_{mn}$ .

Подставляя найденные выражения  $a_g$  и  $\psi(\xi_g)$  в (34), мы можем множественное линейное корреляционное уравнение написать в виде:

$$r_{1/(j_2) / (j_2) / \dots / (j_N)} = \sum_{g=2}^N \frac{R_{g1}^{(g)} R_{g1}^{(g)*}}{R_{11}^{(g-1)} R_{11}^{(g)}}. \quad (42)$$

Лесо-Техническая Академия.  
Ленинград.

## ЛИТЕРАТУРА

### К § 1

- Марков А. А., Исчисление вероятностей (Markoff A. A., The calculus of probabilities), 4 изд., Ленинград 1924, стр. 427—437.  
 Романовский В., Note on orthogonalising series of functions and interpolation, Biometrika, Vol. XIX, 1927, pp. 93—97.  
 Романовский В., Sulle regressioni multiple, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno II, n. 2, 1931.  
 Pearson K., On a general method of determining the successive terms in a skew regression line, Biometrika, vol. XIII, 1921, pp. 296—300.  
 Anderson W., Researches into the theory of regression, Lund 1932, pp. 7—19.  
 Wicksell S. D., Analytical theory of regression, Lund 1934, pp. 14—17.

### К § 2

- Чебышев П. Л., О непрерывных дробях (Tchebycheff P. L., Sur les fractions continues) 1855, «Сочинения П. Л. Чебышева, изданные под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонины» («Oeuvres de P. L. Tchebycheff»), т. I, СПб 1899, стр. 203—230.  
 Чебышев П. Л., Об интерполировании по методу наименьших квадратов (Tchebycheff P. L., Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés), 1859. «Сочинения П. Л. Чебышева», т. I, СПб 1899, стр. 473—498.

### К § 7

- Stieltjes Th., Recherches sur les fractions continues, 1894. Ch. II. «Oeuvres complètes de Th. J. Stieltjes». Tome II. Groningen 1918, pp. 419—430.  
 Castelnuovo G., Calcolo delle probabilità. Vol. II, 2 ed., Bologna 1928, p. 160.  
 Бернштейн С. Н., Теория вероятностей (Bernstein S. N., The theory of probabilities), 2 изд., Москва 1934, стр. 307.

### К § 8

- Neyman J., Further notes on non-linear regression, Biometrika, Vol. XVIII, 1926, pp. 257—262.  
 Dieulefait C. E., Contribution à l'étude de la théorie de la corrélation, Biometrika, Vol. XXVI, 1934, pp. 379—403.  
 Dieulefait C. E., Théorie de la corrélation, Rosario 1935, pp. 31—47.

### К § 9

- Митропольский А. К., О корреляционных уравнениях (Mitropolsky A. K., On correlation equations). Напечатано в книге: Богословский С. А. и Зиновьев В. П., Статистический метод учета лесных ресурсов, Ленинград 1932, стр. 114—119.

# A. MITROPOLSKY. ON ESTABLISHING THE CORRELATION EQUATIONS BY TCHEBYCHEFF'S METHOD

## SUMMARY

1. The general form of the correlation equations is established in this paper as an immediate result of the application of the Tchebycheff's method.

The correlation equation expressing a dependence of statistical variable  $X_2$  upon  $X_1$  has the following general form

$$r_{(j_1)/1}^{(h)} = \sum_{g=0}^h \frac{D_g^{(g)} D_g^{(g)*}}{D^{(g-1)} D^{(g)}},$$

where  $r_{(j_1)/1}^{(h)}$  is the conditional standard moment of statistical variable  $X_2$  on the assumption that the statistical variable  $X_1$  takes the value  $X_{1(j_1)}$ , and the determinants

$$D_g^{(g)}, D_g^{(g)*}, D^{(g-1)}, D^{(g)}$$

are given by (20)–(23). This general form of correlation equation coincides with the formula obtained by Neyman otherwise.

2. Establishing the general form of correlation equation the standard values  $\xi_{1(j_1)}$  of statistical variable  $X_1$  are taken, and the coefficients of correlation equation are expressed by determinants composed of standard moments.

Owing to this the brief formulae are received which are convenient for computations. In particular, the Tchebycheff's symbols assume a very simple form as follows

$$(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & r_{f-1/0} & r_{g/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots & r_{f/0} & r_{g+1/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots & r_{f+1/0} & r_{g+2/0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{f/0} & r_{f+1/0} & r_{f+2/0} & \dots & r_{2f-1/0} & r_{2g/0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & r_{f-1/0} \\ 0 & 1 & r_{3/0} & \dots & r_{f/0} \\ 1 & r_{3/0} & r_{4/0} & \dots & r_{f+1/0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{f-1/0} & r_{f/0} & r_{f+1/0} & \dots & r_{2f-2/0} \end{vmatrix}$$

3. By means of the Tchebycheff's method the general form of multiple linear correlation equation is also established:

$$r_{1/(j_2)/(j_3)/\dots/(j_N)} = \sum_{g=2}^N \frac{R_{g1}^{(g)} R_{g1}^{(g)*}}{R_{11}^{(g-1)} R_{11}^{(g)}},$$

in which  $r_{1/(j_2)/(j_3)/\dots/(j_N)}$  is the conditional standard moment of statistical variable  $X_1$  on the assumption that the statistical variables

$$X_2, X_3, \dots, X_N$$

takes the values

$$X_{2(j_2)}, X_{3(j_3)}, \dots, X_{N(j_N)}$$

and the determinants  $R^{(g)}$ ,  $R^{(g)*}$  and their co-factors are given by (40)–(41).

## Оглавление

	<i>Стр.</i>
<b>А. Н. Крылов.</b> О расчете нагревания масляного кабеля при коротком замыкании . . . . .	3
<b>Н. А. Артемьев.</b> Периодические решения одного класса уравнений в частных производных .	15
<b>А. М. Журавский.</b> О приближенных кратных квадратурах . .	51
<b>Д. Ю. Панов.</b> Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей .	63
<b>Л. В. Канторович.</b> Эффективные методы в теории конформных отображений . . . . .	79
<b>Л. В. Канторович.</b> О полуупорядоченных пространствах . . .	91
<b>С. Б. Бергман.</b> О некоторых эффективных методах конформного отображения . . . . .	111
<b>А. К. Митропольский.</b> Об установлении корреляционных уравнений по способу Чебышева .	125

## Sommaire

	<i>Pag.</i>
<b>A. Kriloff.</b> On the heating of a cable having an oil core during a short circuit . . . . .	14
<b>N. Artemiev.</b> Über die periodischen Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen . . . . .	45
<b>A. Jouravsky.</b> Sur les quadratures approchées multiples . . .	62
<b>D. Panov.</b> Solution des problèmes limites des équations aux dérivées partielles pour les domaines longs et étroits . . . .	77
<b>L. Kantorovitch.</b> Les méthodes effectives dans la théorie des représentations conformes . . .	90
<b>L. Kantorovitch.</b> Sur les espaces semiordonnés . . . . .	110
<b>Stefan Bergmann.</b> Über einige Methoden zur effektiven Durchführung der konformen Abbildung .	123
<b>A. Mitropolsky.</b> On establishing the correlation equations by Tchebycheff's method . . . . .	134



Редактор серии **В. А. Толетиков**

Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 11/I 1937 г. Подписано к печати 7/V 1937 г. Формат 72×108 см.  
8 $\frac{1}{2}$  печ. л. 45.760 зн. в печ. л.

Уполн. Главлита Б-19197.

Тираж 2350 экз.

Заказ 183.

АНИ № 520.

---

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., д. 9.